LOGICA, LOGICA MATEMATICĂ ȘI PRINCIPIILE LOGICII ÎN VIZIUNEA LUI L.E.J. BROUWER

VIOREL VIZUREANU

În două studii anterioare[1], am încercat, pe de o parte, să oferim o structură de interpretare a concepției filosofice a matematicianului intuiționist L.E.J. Brouwer, identificând ceea ce am numit paliere de analiză, menite a oferi o privire „organică”, totalizatoare asupra acesteia. Astfel, putem să vorbim în cazul intuiţionismului lui Brouwer despre „straturi hermeneutice” succesive constituite prin:

– raportarea față de comunicare interumană în general;
– raportarea față de limbaj;
– raportarea față de știință și matematică;
– raportarea față de logică în întregul ei;
– raportarea față de logica matematică;
– raportarea față de aplicarea particulară în matematică a anumitor principii / legi (logice);
– raportarea față de logica intuiționistă (și față de formalizarea în genere a intuiționismului).

La acestea am adăugat și poziţia lui Brouwer în ceea ce priveşte subiectivitatea în sens filosofic, una configurată de el preponderent epistemologic prin intermediul noţiunii de *subiect creator*, apreciind cu același prilej că această poziție a sa oarecum „strânge” laolaltă anumite aspecte esenţiale expuse pe palierele menţionate mai sus.

Pe de altă parte, tot cu aceleași prilejuri am abordat primele trei din palierele menţionate, cele consacrate comunicării, limbajului, ştiinţei şi matematicii, încercând să indicăm o configurație comprehensivă în ceea ce le priveşte.

În cele ce vor urma, vom completa prezentarea tabloului filosofic implicat de intuiționismul lui Brouwer, abordând concentrat restul palierelor amintite în cadrele fixate de studiile noastre anterioare[2], cele vizând logica, logica matematică şi principiile logicii[3].

---

[1] A se vedea articolul nostru consacrat intuiţionismului lui Brouwer din *Studii de istorie a filosofiei universale*, vol. XXIV, 2016, p. 145–162, precum şi cel dedicat viziunii sale despre ştiinţă şi matematică din *Revista de filosofie,* tomul LXIII, nr. 6, 2016, p. 761–776.

[2] Cu excepţia analizei subiectului creator, căruia îi vom dedica un studiu separat.

[3] Este dezirabil de aceea, pentru o înţelegere adecvată a subiectelor în cauză, să ne raportăm la ansamblul studiilor dedicate unei abordări filosofice a intuiţinismului lui Brouwer. Iar aceasta cu atât mai mult cu cât – am subliniat şi cu precedentele ocazii – concepţia lui Brouwer ne apare ca fiind una pe care am putea-o caracteriza ca posedând o dezvoltare „organică”.

*

Reflecțiile lui Brouwer despre logică se dezvoltă ca urmare, pe de o parte, a interogării de către el a raportului dintre matematică și logică impus comunității științifice odată cu evoluția matematicii de la sfârșitul secolului al XIX-lea, și, pe de altă parte, ca o consecință firească a construirii de către el, încă de la începuturile activității sale, a unui sistem filosofic *sui generis* în care în mod firesc logica trebuia să își găsească un loc. Bineînțeles, de cele mai multe ori cele două motive se întrepătrund, și nu întâmplător, după cum vom vedea în continuare.

Din prima perspectivă, s-a putut aprecia că „Brouwer a fost în mod evident primul care să evoce posibilitatea că aplicarea logicii de bază (*basic logic*) la matematică poate să fie interogată. El a procedat astfel înainte ca logica de ordinul întâi să se individualizeze în mod clar, iar modul său de a proceda a fost întotdeauna informal, fără a depinde de o anumită formalizare”[4]. Această remarcă a lui Parsons precum și observațiile următoare pe care le vom face ne permit să susținem că ceea ce Brouwer a avut în mod constant în vedere a fost ideea de logică în general, el privind ceea ce numim azi logică matematică oarecum ca o dezvoltare firească a logicii clasice, care păstra spiritul acesteia, în ciuda faptului că „invada” în mod programatic în principal matematica.

Din cealaltă perspectivă evocată de noi, concepția lui Brouwer despre logică apare ca strâns legată de cea despre limbaj şi statutul cognitiv al acestuia. Matematica[5], precum intelectul uman (a cărui „funcţionare” o şi exprimă), este una – în acest sens, este anistorică, nondepedentă social / cultural, non-contingentă istoric. Limbajul şi logica aferentă acestuia sunt însă creaţii culturale, pe scurt ele ar fi putut să fie altfel (de aceea, dincolo de imperfecţiunile sau lipsurile constatate concret, ele nu pot constitui din capul locului un mediu infailibil al cunoaşterii): „dată fiind o aceeași organizare a intelectului uman și, prin urmare, o aceeași matematică, un limbaj diferit s-ar fi putut forma foarte bine, unul în care limbajul raționării logice, atât de cunoscut nouă, să nu i se poată potrivi (*would not fit*)”[6].

Prin urmare, conchide Brouwer, „logica teoretică la fel ca și logica matematică (*logistic*) sunt *științe empirice* și (…) ambele *aplică* matematica; ele nu pot oferi deci niciun fel de informație cu privire la organizarea intelectului uman; există motive întemeiate de a le cuprinde mai degrabă sub disciplina *etnografiei* decât sub cea a *psihologiei*”[7].

Deci, pentru a sintetiza aceste aspecte: a) logica ar putea fi foarte bine alta (sau ar trebui să fie alta), dacă limbajul nostru ar fi altul – în condițiile în care matematica reprezintă un „invariant cognitiv”; b) contrar tuturor aparențelor (sau contrar întregii literaturi „oficiale”), nu există nicio necesitate internă, nicio infailibilitate cognitivă a logicii – necesitatea ei este un construct cultural (dacă nu chiar o iluzie necesară existenței societății noastre occidentale ca atare); logica ne

[4] Charles Parsons, „Infinity and a Critical View of Logic”, *Inquiry*, vol. 58, nr. 1, 2015, p. 3.

[5] În ceea ce putem numi esenţa sa intuiţionistă.

[6] L.E.J. Brouwer, „On the Foundations of Mathematics [Over de Grondslagen der Wiskunde]” (1907), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, p. 74.

[7] *Ibidem*.

dă informații cu privire la o realitate socială constituită; c) logica, de oricare fel ar fi aceasta, nu descrie sub nicio formă mintea umană sau intelectul uman, ea nu exprimă gândirea, spre deosebire de matematică; d) logica şi limbajul *nu produc cunoaştere*; e) (cu adresare directă logisticii) logica aplică, folosește matematica și nu invers – matematica este originară.

„Raţionamentul din matematică *nu* este un raţionament logic”, afirmă Brouwer răspicat într-o scrisoare din 1907 către Korteweg, îndrumătorul tezei sale de doctorat, adăugând că „doar din cauza sărăciei limbajului nostru acesta face apel la conectori din raționarea logică”[8]. Această afirmaţie trebuie pusă şi în contextul viziunii sale conform căreia „principiile și regulile logicii sunt de fapt teoreme deghizate care privesc relația părților cu întregul”[9].

Pe scurt, raportul (istoric, dar şi „logic”) dintre matematică şi logică trebuie (re)pus în termenii săi – să-i numim – „filogenetici”. Apropriindu-şi prin teoria mulţimilor matematica, logica îşi uită „originea” matematică, generând astfel un „păcat adamic” *sui generis*. După cum a sintetizat H. Weyl, „În conformitate cu viziunea și lectura sa [a lui Brouwer – n.n.] a istoriei, logica clasică a fost abstrasă din matematica mulțimilor finite și a submulțimilor acestora. (…) Uitându-se de această origine determinată, s-a considerat greșit mai apoi că logica este ceva superior și care precede oricărei matematici, pentru ca, în cele din urmă, ea să fie aplicată, fără nicio justificare, matematicii mulțimilor infinite”[10].

În lumina celor spuse anterior, nu este de mirare că s-a putut aprecia că, la modul general, „în sistemul teoretic al lui Brouwer nu și-a găsit locul nu doar reflecția asupra logicii, dar nici măcar aprecierea acesteia drept o activitate pură, neaplicată, cultivată de dragul ei însăși”[11]. Firește, adăugăm noi, lucrurile nici nu puteau sta altfel de vreme ce logica este legată la Brouwer de limbaj, iar acesta este apreciat de la bun început ca un fenomen secundar, deformant chiar, social cu o conotație negativă, prin raportare la activitatea constructivă a matematicianului.

Cât privește poziția lui Brouwer față de principiile (legile) logicii în genere, ea este sintetizată de Michael Detlefsen după cum urmează: „Legile logicii nu sunt «indicaţii (*directives*) pentru actele construcţiei matematice»[12], ci ele derivă din

---

[8] Apud Walter P. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam etc., 1990, p. 503.

[9] Cf. Tomasz Placek, *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity. A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*, Springer-Science+Business Media, B.V., Dordrecht, 1999, p. 64.

[10] H. Weyl, „Mathematics and logic”, *Amer. Math. Monthly* 53, 2–13, 1946, apud Douglas S. Bridges, „Reality and Virtual Reality in Mathematics”, 2006, p. 9.

[11] Miriam Franchella, „L.E.J. Brouwer: Towards Intuitionistic Logic”, *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 320. Există, e drept, și o excepție, amintită și de Franchella, ce se găseşte în rândurile de final ale unui mic text din ultima parte a activității lui Brouwer (1955). Aici Brouwer afirmă „Din fericire algebra clasică a logicii are meritele sale dincolo de problema aplicabilității sale la matematică. Nu doar că ea a atins un înalt grad de perfecţiune ca o imagine formală a tehnicii gândirii simţului comun, dar și în sine, ca un edificiu al gândirii, ea reprezintă un lucru de o excepţională frumuseţe și armonie. Într-adevăr, succesoarea sa, somptuoasa logică simbolică din secolul XX, care în zilele noastre suscită neîncetat cele mai captivante probleme și care face cele mai surprinzătoare și penetrante descoperiri, este tot la fel în bună măsură cultivată pentru ea însăși. Să nu uităm că Boole a fost cel care a inițiat toate acestea.” (L.E.J. Brouwer, „The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic”, în L.E.J. Brouwer, *Collected Works,* vol. I, p. 554).

[12] Detlefsen citează aici din Brouwer, „On the Foundations of Mathematics [Over de Grondslagen der Wiskunde]”, p. 79.

regularitățile din limbaj (posibil mentale) utilizate pentru a exprima sau reprezenta astfel de construcții[13]. Și chiar dacă regularitățile unei asemenea scheme de reprezentare date se pot dovedi utile în încercările noastre de a ne reaminti experiențele matematice originare și pentru a le comunica altor oameni, ele nu trebuie să fie confundate și nici echivalate cu mijloace de extindere efectivă a acelei experiențe."[14]. Limbajul bazat pe principiile logicii nu face altceva decât să transmită (să anunțe) celuilalt *posibilitatea* unei experiențe matematice constructive, nu se poate substitui acesteia.

Este și motivul pentru care poziția lui Brouwer în privința principiilor logicii nu trebuie restrânsă sub nicio formă la o critică punctuală, tehnică, menită a rezolva o problemă internă a matematicii. Ea trebuie înțeleasă ca fiind mult mai profundă decât se acceptă / prezintă de obicei: „obiecția principală a intuiționistului la adresa utilizării de către matematicianul clasic a logicii *nu* se concentrează pe *utilizarea anumitor principii logice* (în particular, legea terțului exclus şi cele din familia acestuia), ci pe *rolul* pe care matematicianul clasic îl atribuie (sau, cel puțin, îl extinde) în mod general (i.e. fără a ține cont de principiile particulare folosite) utilizării logicii în producerea demonstrațiilor matematice."[15].

Pe de altă parte, s-a considerat că această componentă de critică a logicii în aplicarea sa la matematică poate fi „decuplată" de restul concepției generale a lui Brouwer şi prezentată ca atare ca „independentă": plecându-se de la premise că „există un conflict între aplicarea logicii clasice (în particular a legii terţului exclus) şi cerinţa ca toate demonstraţiile să fie constructive. Deşi pot exista diferenţe de opinie între ceea ce poate fi apreciat drept o demonstraţie constructivă (*constructive proof*), acest punct este cel puţin independent de filosofia cu totul specială (*idiosyncratic*) a lui Brouwer"[16].

Din păcate, aceasta s-a și întâmplat de fapt cel mai adesea (astfel că elementul „identificator" al lui Brouwer este cel mai adesea pur şi simplu poziţia sa cu privire la aplicarea legii logice a terţului exclus în matematică), cu atât mai mult cu cât se poate observa cu uşurinţă caracterul „special", „dificil" sau „ciudat" al filosofiei lui Brouwer (nu doar a matematicii!) care stă (totuşi) la baza acestei „poziţii" particulare.

Cum am afirmat, respingerea de către Brouwer a *legii terțului exclus* trebuie înțeleasă în contextul mai vast al reflecției cu privire la fundamentele matematicii și al faptului că orice entitate matematică este o construcție mentală efectivă. Aceasta înseamnă *eo ipso* și o respingere a *negativității* în matematică, a posibilității de a manipula – necritic, fără restricții – simbolul acesteia în mod formal. După cum arată Heyting, „în matematică facem doar aserţiuni irevocabile. Enunţuri despre cunoașterea noastră actuală sunt matematice doar dacă sunt pozitive, cu alte cuvinte, dacă exprimă rezultatul unei construcţii matematice care a fost produsă efectiv. Un enunț negativ poate fi matematic numai dacă poate fi adus la o formă

[13] După cum ne așteptam, și în acest caz particular regăsim prioritatea construcției matematice în dauna logicii care reglementează limbajul în care aceasta este redată.

[14] Michael Detlefsen, „Brouwerian Intuitionism", *Mind*, Vol. 99 (396), October 1990, p. 515.

[15] M. Detlefsen, *op. cit.*, p. 501. Detlefsen își propune de aceea să înfățișeze în același articol o critică intuiționistă a logicii mult mai radicală decât ceea ce se prezintă îndeobște sub această titulatură.

[16] Ch. Parsons, *op. cit.*, p. 5.

pozitivă”[17]. Heyting încearcă de altfel să inverseze maniera de interpretare a poziției lui Brouwer cu privire la legea terțului exclus. Acesta este respins de Brouwer nu pentru că utilizarea sa duce la paradoxe în teoria mulțimilor, ci ca o consecință necesară a concepției sale generale asupra matematicii, mai precis de respingere a realismului conceptual și a formalismului extrem[18].

E ca și cum am spune că, deși „declanșată” istoric de criza paradoxelor din teoria mulțimilor, concepția lui Brouwer în privința matematicii este una care se dezvoltă autonom de aceasta și ar fi dus oricum – sau în mod natural – la respingerea din cadrele matematicii a principiului terțului exclus. Se poate vedea în această interpretare și o reafirmare a pozitivității matematicii (înțeleasă intuiționist) ce se găsește la Brouwer însuși. Deși fenomen istoric și social, matematica intuiționistă apare în viziunea adepților săi ca non-reactivă, ca având dovada existenței sale în revenirea la caracterului pur constructiv al matematicii și în prezervarea acestuia. Într-un fel, matematica intuiționistă exista deja, ea reprezintă adevărata esență a matematicii (ca și a comportamentului mental uman), noi nu facem astfel decât să revenim la ea, să ne reamintim ceea ce am pierdut în decursul istoriei umanității[19]. Ea nu se naște deci dintr-o critică, nu reprezintă o alternativă viabilă la o altă poziție privind matematica ce trebuie abandonată, nu este pentru Brouwer o invenție / ipoteză a intelectului care vrea să iasă dintr-o situație dificilă.

Revenind la terțul exclus propriu-zis, să observăm cum acesta are în viziunea lui Brouwer o valoare cu totul socială, este expresia unei credințe culturale, a unei dogme, nu instanțierea unui adevăr a priori: „[l]unga credință în validitatea universală a principiului terțului exclus este considerată de către intuiționism drept un fenomen din istoria civilizației de același fel precum vechea credință în caracterul rațional al numărului π sau în rotația firmamentului ceresc în jurul unei axe ce străbate pământul. Iar intuiționismul încearcă să explice persistența acestei dogme prin două fenomene: mai întâi, prin caracterul evident non-contradictoriu al principiului în cazul aplicării sale la o aserțiune singulară arbitrară; apoi, prin validitatea practică a întregii logici clasice pentru un grup vast de *fenomene simple din viața de zi cu zi*. Ultimul fenomen a produs în mod cu totul evident o asemenea impresie puternică încât acel joc al gândirii (*play of thought*) care fusese inițial logica clasică a devenit un obicei (*habit*) adânc înrădăcinat al gândirii, care a fost considerat nu doar util, dar chiar și ca având un caracter a priori”[20].

Strâns legat de observațiile anterioare și într-un orizont tehnic de data asta, să notăm că, de altfel, după mai multe abordări ale acestei probleme[21], Brouwer va

[17] A. Heyting, „L.E.J. Brouwer”, în Raymond Klibansky (ed.), *Contemporary Philosophy. A Survey*, vol. I: *Logic and Foundations of Mathematics*, La Nuova Italia Editura, Firenze, 1968, p. 313.

[18] *Ibidem*.

[19] Regăsim astfel la Brouwer același mecanism istorico-hermeneutic propriu unei anumite faze a modernității, de căutare a unor fundamente din ce în ce mai pure, care ne permit să ne sustragem astfel printr-o răsturnare decisivă unui mers al istoriei care nu a făcut decât să altereze progresiv cunoașterea sau existența umană. Numele acestui mecanism am putea să îl preluăm de la Heidegger, poate cel mai fidel teoretician al său, care ne vorbește pe larg și insistent despre „uitarea Ființei” (*Seinsvergessenheit*).

[20] L.E.J. Brouwer, „Consciousness, Philosophy, and Mathematics” (1948), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, p. 492.

[21] Vezi în acest sens M. Franchella, *op. cit.*, pp. 307–313, de unde am și preluat analiza și principalele concluzii ale acesteia.

considera în 1928 (în articolul său „Intuitionistiche Betrachtungen über den Formalismus”[22]) că principiul (legea) terțului exclus poate fi asertat în trei moduri diferite: asertarea simplă, i.e. principiul general aplicat în cazul unei proprietăți simple și unei singure entități matematice: (P(a) ∨ ¬ P(a)); un număr finit de asertări, i.e. o conjuncție finită a unor asertări simple; un număr infinit de asertări, i.e însuși principiul general sau aplicarea acestuia la o singură entitate (∀P((P(a) ∨ ¬ P(a))) sau principiul general aplicat la o singură proprietate (∀*x*(P*x* ∨ ¬ P*x*)). Primele două asertări sunt non-contradictorii (a doua, prin apelul la inducție), spre deosebire de de cea de-a treia[23]. În fapt, cronologic vorbind, concluzia poate fi că „Brouwer a interpretat invaliditatea legii terțului exclus în trei moduri diferite de-a lungul carierei sale: înainte de 1928 a considerat că cineva nu poate susține că aceasta poate fi aplicată [în toate cazurile]; după aceea, a apreciat că [doar] legea generală este contradictorie; pentru ca la final să accepte simultan ambele accepțiuni”[24]

BIBLIOGRAFIE:

Douglas S. Bridges, „Reality and Virtual Reality in Mathematics”, 2006 (disponibil la http://www.math.canterbury.ac.nz/~d.bridges/files/real.pdf).

L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, Vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam & Oxford / American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1975.

L.E.J. Brouwer, „On the Foundations of Mathematics [Over de Grondslagen der Wiskunde]” (1907), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, pp. 11–101.

L.E.J. Brouwer, „Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus” (1928), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, pp. 374–379.

L.E.J. Brouwer, „Consciousness, Philosophy, and Mathematics” (1948), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, pp. 480–494.

L.E.J. Brouwer, „The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic” (1955), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, pp. 551–554.

Dirk van Dalen (editor), *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge University Press, Cambridge etc., 1981.

Michael Detlefsen, „Brouwerian Intuitionism”, *Mind*, Vol. 99 (396), October 1990, pp. 501–534.

Miriam Franchella, „L.E.J. Brouwer: Towards Intuitionistic Logic”, *Historia Mathematica*, 22, 1995, pp. 304–322.

A. Heyting, „L.E.J. Brouwer”, în Raymond Klibansky (ed.), *Contemporary Philosophy. A Survey*, vol. I: *Logic and Foundations of Mathematics*, La Nuova Italia Editura, Firenze, 1968, pp. 308–315.

Charles Parsons, „Infinity and a Critical View of Logic”, *Inquiry*, vol. 58, Nr. 1, 2015, pp. 1–19.

Tomasz Placek, *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity. A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*, Springer-Science+Business Media, B.V., Dordrecht, 1999.

Walter P. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam etc., 1990.

[22] L.E.J. Brouwer, „Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus” (1928), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, pp. 374–379.

[23] Aceeași poziție va fi reiterată de Brouwer în anii 1946-1951 în timpul prelegerilor sale de la Cambridge – vezi ediția postumă a acestora, editată de Dirk van Dalen în 1981.

[24] M. Franchella, *op. cit.*, p. 313.