LOGICA VALORILOR LOGICE

IONEL NARIȚA

Există propoziții care își modifică valoarea de adevăr în funcție de *context*; în anumite contexte, acestea sunt adevărate, iar în altele, propozițiile respective sunt false. De exemplu, propoziția A = „Ion Iliescu este preşedintele României” care era falsă înainte de 1989, devine adevărată între 1990 şi 1996, pentru a fi din nou falsă din 1996 până în 2000; din 2000 până în 2004, propoziția respectivă ajunge din nou adevărată, iar după 2004, ea este iarăşi falsă. Alte propoziții îşi păstrează valoarea de adevăr indiferent de context, cum este B = „Toate triunghiurile sunt figuri geometrice cu trei laturi”. De aceea, după modul în care se comportă relativ la diferite contexte, deosebim trei categorii de propoziții:

1) *tautologiile* – propoziții adevărate în orice context;

2) *contradicțiile* – propoziții false în orice context;

3) propozițiile *factuale*, care sunt adevărate în unele contexte şi sunt false în altele.

Aceste valori ale propozițiilor, respectiv, tautologia, contradicția şi factualitatea, le numim valori *logice*.[1] Spre deosebire de valorile de adevăr, valorile logice nu se modifică în funcție de context ci o propoziție are aceeaşi valoare logică în orice context. De exemplu, propoziția *A* este factuală indiferent de context, în vreme ce, propoziția *B* este tautologie în orice împrejurare.

1. LOGICA N-VALENTĂ A VALORILOR LOGICE

Deoarece există trei valori logice, calculul acestora ar trebui să fie trivalent, cu alte cuvinte, logica valorilor logice ar trebui să fie o logică trivalentă. Cu toate acestea, logica trivalentă nu reuşeşte să dea seama de valorile logice ale propozițiilor.

Dacă notăm valorile logice prin 1 = tautologia; 0 = contradicția; i = factualitatea, ținând seama că negația unei tautologii este o contradicție şi că negația unei contradicții este tautologie, în vreme ce, negația unei propoziții factuale rămâne factuală, obținem următorul tabel pentru negație[2]:

[1] Unii consideră valorile de adevăr drept valori logice. Dar, asupra valorilor de adevăr nu se poate decide prin mijloacele logicii. (Nievergelt Y., *2002*, p. 14).

[2] Brzozowski J., Esik Z., Iland Y., *2003*, p. 6.

Tabel 1

p	~p
1	0
0	1
i	i

Pe de altă parte, dacă avem în vedere proprietățile disjuncției:

1) idempotența;
2) comutativitatea;
3) asociativitatea;
4) falsul este element neutru;
5) adevărul este element absorbant,

ajungem la următorul tabel:

Tabel 2

p v q	1	0	i
1	1	1	1
0	1	0	i
i	1	i	i

O formulă validă a logicii propozițiilor trebuie să aibă ca interpretări numai tautologii, cu alte cuvinte, o asemenea formulă trebuie să fie validă şi pentru logica valorilor logice. De exemplu, formula „p v ~p" este lege a logicii propozițiilor. Cu toate acestea, ea nu este lege a logicii trivalente a valorilor logice[3]:

Tabel 3

p	~p	p v ~p
1	0	1
0	1	1
i	i	i

Deoarece, pe ultima coloană, nu s-a obținut numai valoarea „1", înseamnă că, în logica trivalentă a valorilor logice, „p v ~p" nu este tautologie aşa cum ar fi trebuit. De aceea, logica valorilor logice nu poate fi o logică trivalentă.

Motivul pentru care logica trivalentă este afectată de paradox în acest caz, este relația ~i = i. Dacă s-ar mai introduce un tip de factualitate care să se modifice odată cu negația, atunci paradoxul este evitat. Să presupunem, că: ~i = i* astfel încât i v i* = 1; în acest caz, pe ultima coloană a tabelului (3) s-ar obține doar valoarea „1", şi formula dată ar fi validă dar s-ar trece la o logică tetravalentă iar conectorul disjuncției trebuie redefinit:

Tabel 4

p v q	1	0	i	i*
1	1	1	1	1
0	1	0	i	i*
i	1	i	i	1
i*	1	i*	1	i*

[3] Brzozowski J., Esik Z., Iland Y., *2003*, p. 6.

Dacă reluăm decizia asupra formulei „p v ~p” în cadrul acestei logici tetravalente, paradoxul este evitat şi formula este dovedită ca lege logică:

Tabel 5

p	~p	p v ~p
1	0	1
0	1	1
i	i*	1
i*	i	1

Deşi, prin introducerea unei a patra valori, paradoxul de mai sus este înlăturat, apar alte paradoxuri. De pildă, dacă *p* şi *q* sunt două propoziții factuale independente între ele, atunci p&q şi p&~q ar trebui, la rândul lor, să fie ambele factuale. Dar, în logica tetravalentă a valorilor logice, una dintre cele două conjuncții este contradictorie:

Tabel 6

p	q	~q	p&q	p&~q
i	i	i*	i	0
i	i*	i	0	i

Pentru a evita şi acest tip de paradoxuri, ar trebui introdusă o valoare de factualitate pentru *q* diferită de aceea a lui *p* dar, în acest fel, aceeaşi problemă apare pentru propoziții precum „p & q & r”, respectiv, „p & q & ~r” etc. Se ajunge la rezultatul că nu poate exista o logică n-valentă a valorilor logice ci, fiecare propoziție are propria sa valoare sau propriul grad de *factualitate* sau de *realizabilitate*. Prin urmare, valorile logice nu pot fi restrânse la trei (tautologie, factualitate şi contradicție) ci, mai curând, valorile logice ale propozițiilor sunt graduale, mergând de la contradicție până la tautologie.

2. CALCULUL VALORILOR LOGICE

Valoarea logică a propoziției *p* depinde de dimensiunea mulțimii contextelor relativ la care o propoziție este adevărată (domeniul de adevăr). Dacă *U* este universul sau mulțimea tuturor contextelor posibile, şi *Dp* reprezintă domeniul de adevăr al propoziției *p* atunci:

1) *p* este tautologie dacă şi numai dacă Dp = U;

2) *p* este contradicție dacă şi numai dacă Dp = ∅;

3) *p* este factuală dacă şi numai dacă Dp este o parte strictă, nevidă a lui *U*.

Cu cât dimensiunea domeniului de adevăr al propoziției se apropie de *U*, cu atât creşte valoarea logică a acesteia (se apropie de tautologie), de aceea, valoarea logică a unei propoziții trebuie să corespundă ponderii pe care o are domeniul său de adevăr în raport cu *U*.

Dacă *M* este o mulțime şi A_i sunt părțile acesteia atunci, pentru a măsura ponderea unei părți în raport cu *M*, asociem fiecărei părți un număr natural, f(A), ținând seama că, dacă o mulțime are mai multe elemente, atunci are o pondere mai mare şi, prin urmare, trebuie să i se asocieze un număr mai mare. Mulțimile din sistemul B = $<A_i>$ sunt *disjuncte* între ele dacă şi numai dacă intersecția oricărei mulțimi din sistemul *B* cu reuniunea celorlalte este vidă. Ținând seama de aceste precizări, numerele prin care măsurăm ponderile părților mulțimii *M* satisfac următoarea relație:

$(A_i$ sunt disjuncte între ele$) \supset (f(\cup_i(A_i)) = \sum_i f(A_i))$, respectiv, (1)
$(k)(A_k \cap (\cup_{i \neq k}(A_i))) = \varnothing) \supset (f(\cup_i(A_i)) = \sum_i f(A_i))$

De exemplu, dacă *A* şi *B* sunt două mulțimi disjuncte, atunci are loc:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) \quad (2)$$

Mulțimii vide îi corespunde numărul zero:

$(A \cap \varnothing) = \varnothing$ (3)
$((A \cap \varnothing) = \varnothing) \supset (f(A \cup \varnothing) = f(A) + f(\varnothing))$
$f(A \cup \varnothing) = f(A) + f(\varnothing)$
$f(A) = f(A) + f(\varnothing)$
$f(\varnothing) = f(A) - f(A) = 0$

Utilizând ponderile domeniilor de adevăr, putem defini valoarea logică a unei propoziții. Dacă Dp este domeniul de adevăr al propoziției *p* şi *P* este valoarea logică a acesteia atunci:

$$P =_{df} f(Dp)/f(U) \quad (4)$$

Pentru ca împărțirea să fie posibilă, este necesar ca $f(U) \neq 0$, prin urmare, pentru a exista valori logice, este necesar să admitem ipoteza că universul nu este vid ci există cel puțin un context față de care propozițiile iau valori de adevăr.

Valorile logice, astfel definite, au următoarele proprietăți:

1) valoarea logică a unei tautologii este „1” (cea mai mare valoare logică):

D(tautologie) = U (5)
v(tautologie) = f(D(tautologie))/f(U) = f(U)/f(U) = 1

2) valoarea logică a unei contradicții este „0” (cea mai mică valoare logică):

D(contradicție) = $\varnothing$ (6)
v(contradicție) = f(D(contradicție))/f(U) = f($\varnothing$)/f(U) = 0/f(U) = 0

3) valoarea logică a două propoziții echiveridice este egală:

p = q (presupunere) (7)
Dp = Dq
P = f(Dp)/f(U) = f(Dq)/f(U) = Q
P = Q

4) suma valorilor logice a două propoziţii contradictorii este unitatea:

p şi ~p sunt contradictorii; (8)
$Dp \cup D\sim p = U$
$Dp \cap D\sim p = \varnothing$
$f(Dp \cup D\sim p) = f(Dp) + f(D\sim p)$
$f(U) = f(Dp) + f(D\sim p)$
$f(Dp)/f(U) + f(D\sim p)/f(U) = 1$
$P + P^* = 1$ (P^* reprezintă valoarea logică a negaţiei propoziţiei *p*)
$P^* = 1 - P$

3. VALORILE LOGICE PENTRU UN SISTEM DE DOUĂ PROPOZIŢII

Cu ajutorul relaţiilor de mai sus, putem calcula valoarea logică a oricărei propoziţii. Să luăm în considerare, mai întâi, un sistem alcătuit din două propoziţii, *p* şi *q*. Matricea corespunzătoare acestui sistem este următoarea:

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} p & p & \sim p & \sim p \\ q & \sim q & q & \sim q \end{bmatrix} \\ x_3 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_0 \end{array} \qquad (9)$$

Acestei matrice îi corespunde următoarea figură. Fiecare coloană a matricei este în corespondenţă cu o regiune din figura (1):

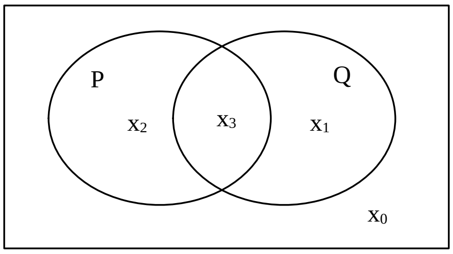

Fig. 1

Fiecare coloană a matricei (9) şi fiecare regiune a figurii (1) reprezintă o conjuncţie de propoziţii. Dacă notăm valorile logice ale conjuncţiilor cu x_i:

$x_3 = v(p \,\&\, q)$ (10)
$x_2 = v(p \,\&\, \sim q)$
$x_1 = v(\sim p \,\&\, q)$
$x_0 = v(\sim p \,\&\, \sim q)$,
obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$x_3 + x_2 = P$ (11)
$x_3 + x_1 = Q$
$x_0 + x_2 = 1 - Q$

Pentru a determina valorile logice x_i trebuie să rezolvăm sistemul de ecuații (11). Determinantul caracteristic al sistemului (11) este nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

Prin urmare, sistemul (11) nu are o soluție determinată. Vom admite necunoscuta x_3 ca parametru nedeterminat (h), când se obțin următoarele soluții:

$$\begin{aligned} x_3 &= h; \\ x_2 &= P - h; \\ x_1 &= Q - h; \\ x_0 &= (1 + h) - (P + Q). \end{aligned} \qquad (13)$$

Dacă ținem seama de faptul că valorile logice ale propozițiilor sunt numere pozitive mai mici sau egale cu 1, obținem domeniul de valori al parametrului h:

$$\begin{aligned} &0 \le h \le 1 \\ &0 \le h \le P \\ &0 \le h \le Q \\ &P + Q - 1 \le h \le P + Q \end{aligned} \qquad (14)$$

Am obținut rezultatul că $(\max(0, P + Q - 1)) \le h \le (\min(P, Q))$, cu următoarele variante:

1) Dacă $P + Q \ge 1$ şi $P \le Q$ atunci $P + Q - 1 \le h \le P$; (15)
2) Dacă $P + Q \ge 1$ şi $P \ge Q$ atunci $P + Q - 1 \le h \le Q$;
3) Dacă $P + Q \le 1$ şi $P \le Q$ atunci $0 \le h \le P$;
4) Dacă $P + Q \le 1$ şi $P \ge Q$ atunci $0 \le h \le Q$;

De exemplu, dacă $P = 0{,}25$ şi $Q = 0{,}80$, atunci $0{,}05 \le h \le 0{,}25$. Valoarea logică a propoziției „p & q" nu poate fi mai mică de 0,05 şi mai mare de 0,25. În schimb, dacă $P = 0{,}25$ şi $Q = 0{,}20$ atunci $0 \le h \le 0{,}20$. Chiar dacă valoarea logică a două propoziții este determinată, conjuncția lor nu are o valoare logică determinată decât în situații speciale date de relația dintre cele două propoziții. Prin urmare, valorile parametrului h sunt cuprinse în intervalul închis:

$h \in [\max(0, P + Q - 1), \min(P, Q)]$ sau, dacă ținem seama că $Q^* = 1 - Q$: (16)
$h \in [\max(0, P - Q^*), \min(P, Q)]$

Pentru a obține intervalele pentru fiecare x_i este suficient ca în expresia de mai sus să înlocuim, după caz, valoarea logică a afirmației cu aceea a negației sau invers:

$x_3 \in [\max(0, P - Q^*), \min(P, Q)]$ (17)
$x_2 \in [\max(0, P - Q), \min(P, Q^*)]$
$x_1 \in [\max(0, P^* - Q^*), \min(P^*, Q)]$, respectiv, $x_1 \in [\max(0, Q - P), \min(P^*, Q)]$
$x_0 \in [\max(0, P^* - Q), \min(P^*, Q^*)]$

Parametrul *h* ia valori extreme dacă propozițiile *p* şi *q* se află în anumite relații ilustrate de pătratul lui Boethius:

1) (h = 0) ≡ (*p* şi *q* sunt *contrare*); (18)
2) (h = P) ≡ (*q* este *subalterna* lui *p*);
3) (h = Q) ≡ (*p* este *subalterna* lui *q*);
4) (h = (P + Q – 1)) ≡ (*p* şi *q* sunt *subcontrare*).

Pentru ca *p* şi *q* să fie *echiveridice* este nevoie ca *p* să fie subalterna lui *q* şi reciproc, respectiv, trebuie să aibă loc simultan h = P = Q deci, în mod necesar, P = Q. La fel, *p* şi *q* sunt contradictorii dacă sunt atât contrare cât şi subcontrare, respectiv, dacă h = 0 = P + Q – 1, de unde rezultă condiția necesară: P + Q = 1, aşa cum am văzut mai sus.

Dacă *h* are o altă valoare, intermediară între extremele amintite, atunci *p* şi *q* sunt independente între ele în diferite grade. De pildă, cu cât această valoare este mai apropiată de zero, cu atât propozițiile sunt mai aproape de contrarietate şi, cu cât este mai apropiată de *P* sau *Q*, cu atât cele două propoziții sunt mai aproape de relația de subalternare. Independența completă a propozițiilor *p* şi *q* are loc atunci când toate conjuncțiile matricei (9) au aceeaşi valoare logică:

$$x_3 + x_2 + x_1 + x_0 = 1 \qquad (19)$$
$$x_3 = x_2 = x_1 = x_0 = 1/4$$

În acest caz, are loc:

$$h = 1/4; \qquad (20)$$
$$P = x_2 + h = 1/2;$$
$$Q = x_1 + h = 1/2.$$

Două propoziții complet independente au, ambele, valoarea logică 1/2. Constatăm că egalitatea valorii logice a două propoziții este o condiție necesară dar nu şi suficientă pentru echiveridicitatea lor. De asemenea, în cazul independenței complete a două propoziții, valoarea logică a conjuncției este produsul valorilor logice a celor două propoziții. Pe de altă parte, dacă două propoziții sunt complet independente atunci şi negațiile lor sunt complet independente.

După cum am văzut, propozițiile sunt independente în diferite grade; de aceea, putem introduce o măsură a gradului de independență al unei propoziții relativ la un sistem, care să fie maxim atunci când valoarea logică a propoziției coincide cu valoarea logică a negației ei (P = P*). Dacă *I* este gradul de independență, atunci:

$$Ip = 1 - |P - P^*|; \qquad (21)$$
$$Ip = 1 - |P - (1 - P)|$$
$$Ip = 1 - |2P - 1|$$

Dacă se au în vedere proprietățile modulului se obține:

$$I_p = 2(1 - P), \text{ pentru } P > 1/2 \quad (22)$$
$$I_p = 1, \text{ pentru } P = 1/2$$
$$I_p = 2P, \text{ pentru } P < 1/2$$

Graficul gradului de independență al unei propoziții în funcție de valoarea ei logică este următorul:

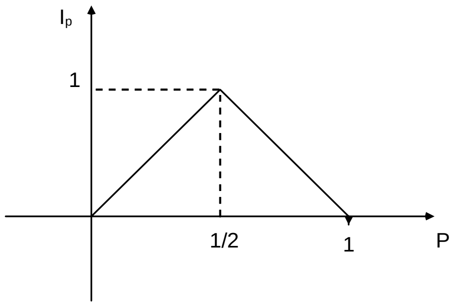

Fig. 2

Gradul de independență al propoziției *p* crește odată cu valoarea sa logică până când *P* ajunge la 0,5 şi apoi scade ajungând la zero când *P* = 1.

4. VALORILE LOGICE ALE PROPOZIȚIILOR COMPUSE

Utilizând matricea sistemului de două propoziții (9) putem calcula valoarea logică a propozițiilor compuse în funcție de valoarea componentelor lor:

1) Valoarea logică a disjuncției:

$$v(p \vee q) = 1 - x_0 = 1 - (1 + h) + (P + Q) \quad (23)$$
$$v(p \vee q) = P + Q - h$$

Dacă ținem seama că $h = v(p \,\&\, q)$, obținem relația:

$$v(p \vee q) + v(p \,\&\, q) = P + Q \quad (24)$$

2) Valoarea logică a implicației:

$$v(p \supset q) = v(\sim p \vee q) \quad (25)$$
$$v(p \supset q) = 1 - x_2 = 1 - (P - h) = 1 + h - P$$
$$v(p \supset q) = 1 + h - P$$
$$v(p \supset q) = P^* + h$$

O condiție necesară pentru implicație este ca valoarea logică a consecventului să fie mai mare decât valoarea logică a antecedentului:

$$v(p \supset q) = 1 \qquad (26)$$
$$1 + h - P = 1$$
$$h - P = 0$$
$$h = Q - x_1$$
$$Q - x_1 - P = 0$$
$$Q = P + x_1$$
$$Q \geq P, \text{ deoarece } x_1 \geq 0$$

3) Valoarea logică a disjuncției exclusive:

$$v(p \oplus q) = x_1 + x_2 = P - h + Q - h \qquad (27)$$
$$v(p \oplus q) = P + Q - 2h, \text{ de unde rezultă relația:}$$
$$v(p \oplus q) + v(p \,\&\, q) = v(p \vee q)$$

4) Valoarea logică a echivalenței:

$$v(p \equiv q) = x_3 + x_0 = h + 1 + h - (P + Q) \qquad (28)$$
$$v(p \equiv q) = (1 + 2h) - (P + Q)^4$$

Dacă ținem seama de condițiile (18) privind valoarea parametrului *h*, ajungem la următoarea corelație între valoarea logică a propozițiilor compuse şi relația dintre componente:

Tabel 7

compusa	*p* şi *q* contrare	*p* şi *q* subcontrare	*q* subalterna lui *p*	*p* subalterna lui *q*
p & q	0	P + Q – 1	P	Q
p v q	P + Q	1	Q	P
p ⊃ q	P*	Q	1	P* + Q
q ⊃ p	Q*	P	P + Q*	1
p ⊕ q	P + Q	2 – (P + Q)	Q – P	P – Q
p ≡ q	1 – (P + Q)	P + Q – 1	1 + P – Q	1 + Q – P

De exemplu dacă P = 0,10 şi Q = 0,30, nu se poate ca *p* şi *q* să fie subcontrare sau ca *p* să fie subalterna lui *q*, astfel încât, ajungem la următorul tabel al valorilor logice pentru propozițiile compuse:

[4] Deşi există unele similitudini, logica valorilor logice nu poate fi considerată o logică a probabilităților. Expresiile valorilor logice ale propozițiilor compuse sunt asemănătoare celor din logica probabilităților numai sub ipoteza că propozițiile componente sunt complet independente între ele, când h = PQ. (Dumitriu A., *1971*, p. 298). Pe de altă parte, valorile logice nu pot fi considerate probabilități deoarece o propoziție are o valoare logică bine determinată şi nu una probabilă.

Tabel 8

compusa	*p* şi *q* contrare	*q* subalterna lui *p*
p & q	0	0,10
p v q	0,40	0,30
p ⊃ q	0,90	1
q ⊃ p	0,70	0,80
p ⊕ q	0,40	0,20
p ≡ q	0,60	0,80

Valorile logice minime şi maxime ale propozițiilor compuse pot fi calculate ținând seama de (15):

Tabel 9

compusa	valoarea logică minimă	valoarea logică maximă
p & q	max(0, P – Q*)	min(P, Q)
p v q	max(P, Q)	min(1, P + Q)
p ⊃ q	max(P*, Q)	min(1, P* + Q)
p ⊕ q	max(P – Q, Q – P)	min(P + Q, P* + Q*)
p ≡ q	max(P – Q*, P* - Q)	min(P + Q*, P* + Q)

De exemplu, dacă P = 0,75 şi Q = 0,30, atunci ajungem la următoarele intervale privind valorile logice ale propozițiilor compuse:

Tabel 10

compusa	valoarea logică minimă	valoarea logică maximă
p & q	0,05	0,30
p v q	0,75	1
p ⊃ q	0,30	0,55
q ⊃ p	0,75	1
p ⊕ q	0,45	0,95
p ≡ q	0,05	0,55

În ciuda faptului că valoarea logică a propozițiilor componente este precisă, compusa nu are o valoare determinată ci, poate fi orice valoare între un minim şi un maxim.[5] De exemplu, valoarea minimă a disjuncției, în cazul de mai sus, este „0,75”, (când *p* este subalterna lui *q*), iar valoarea maximă este „1”, când valoarea logică a conjuncției este de „0,05”, respectiv, cele două propoziții sunt subcontrare. De asemenea, potrivit valorilor logice ale celor două propoziții, mai curând *p* este subalterna lui *q* decât invers.

Un caz aparte îl reprezintă propozițiile complet independente, când P = Q = 1/2 şi h = PQ = 1/4. În această situație, propozițiile compuse au următoarele valori logice:

[5] De aici nu rezultă că o propoziție compusă are o valoare logică nedeterminată. Valoarea logică a oricărei propoziții este bine definită, dar nu poate fi stabilită doar pe baza valorilor logice ale propozițiilor componente. (vezi și Avron A., Zamansky A., *2011*, p. 226).

Tabel 11

compusa	valoarea logică
p & q	0,25
p v q	0,75
$p \supset q$	0,75
$p \oplus q$	0,50
$p \equiv q$	0,50

Cu ajutorul calculului valorilor logice, putem rezolva diferite ecuații logice, pentru a determina condițiile în care o propoziție are o anumită valoare logică. De pildă, să stabilim condițiile în care $p \supset (p \& q)$ este tautologie:

$$\begin{aligned} & v(p \supset (p \& q)) = 1 \\ & 1 + v(p \& p \& q) - P = 1 \\ & v(p \& q) - P = 0 \\ & P = h \end{aligned} \qquad (29)$$

Condiția pentru ca propoziția dată să fie tautologie este aceeaşi ca şi pentru ca $p \supset q$ să fie tautologie; cele două sunt echiveridice.

5. VALORILE LOGICE PENTRU UN SISTEM DE TREI PROPOZIȚII

Până acum am avut în vedere calculul valorilor logice relativ la un sistem de două propoziții. Să ne oprim şi asupra modului în care putem calcula valoarea logică într-un sistem de trei propoziții. Matricea corespunzătoare unui asemenea sistem, <p, q, r>, este:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} p & p & p & p & \sim p & \sim p & \sim p & \sim p \\ q & q & \sim q & \sim q & q & q & \sim q & \sim q \\ r & \sim r & r & \sim r & r & \sim r & r & \sim r \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{matrix} \end{array} \qquad (30)$$

Modelul grafic al matricei (30) este următorul:

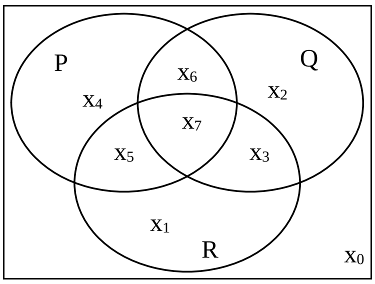

Fig. 3

Sistemul de ecuații corespunzător matricei (30) este:

$$x_7 + x_6 + x_5 + x_4 = P \qquad (31)$$
$$x_7 + x_6 + x_3 + x_2 = Q$$
$$x_7 + x_5 + x_3 + x_1 = R$$
$$x_3 + x_2 + x_1 + x_0 = 1 – P$$

Sistemul (31) nu are o soluție determinată ci, la fel ca în situația sistemului cu două propoziții, soluția este parametrică. Spre deosebire de cazul precedent, când era suficient un parametru, de această dată, sunt necesari patru parametri. Una dintre variantele de soluție este următoarea:

$$x_7 = h_7;\ x_6 = h_6;\ x_5 = h_5;\ x_3 = h_3 \qquad (32)$$
$$x_4 = P – (h_7 + h_6 + h_5)$$
$$x_2 = Q – (h_7 + h_6 + h_3)$$
$$x_1 = R – (h_7 + h_5 + h_3)$$
$$x_0 = (P + Q + R) – (2h_7 + h_6 + h_5 + h_3)$$

Dacă ținem seama că x_4, x_2 şi x_1 nu pot fi mai mici decât *0*, rezultă că h_7 trebuie să fie mai mic decât *P* şi *Q* şi *R*, respectiv, trebuie să fie mai mic decât cea mai mică valoare logică a celor trei propoziții. Dacă aplicăm acelaşi raționament şi pentru ceilalți parametri, obținem valorile lor maxime:

$$h_7 \le \min(P, Q, R) \qquad (33)$$
$$h_6 \le \min(P, Q, R^*)$$
$$h_5 \le \min(P, Q^*, R)$$
$$h_3 \le \min(P^*, Q, R)$$

Valorile minime a parametrilor h_i sunt egale cu *0*, cu excepția următoarelor situații:

$$h_7 + h_6 \ge P + Q – 1, \text{ dacă } P + Q \ge 1; \qquad (34)$$
$$h_7 + h_5 \ge P + R – 1, \text{ dacă } P + R \ge 1;$$
$$h_7 + h_3 \ge Q + R – 1, \text{ dacă } Q + R \ge 1;$$
$$2h_7 + h_6 + h_5 + h_3 \ge P + Q + R – 1, \text{ dacă } P + Q + R \ge 1.$$

De exemplu, dacă P = 0,25, Q = 0,80 şi R = 0,10, valorile parametrilor se încadrează între limitele date de următoarele relații: $h_7 \le 0{,}10$; $h_6 \le 0{,}25$; $h_5 \le 0{,}10$; $h_3 \le 0{,}10$, respectiv:

$$h_7 + h_6 \ge 0{,}05; \qquad (35)$$
$$h_7 + h_5 \ge 0;$$
$$h_7 + h_3 \ge 0;$$
$$2h_7 + h_6 + h_5 + h_3 \ge 0{,}15.$$

În cazul unui sistem de trei propoziții, la fel cu sistemul alcătuit din două propoziții, valorile extreme ale parametrilor reprezintă situațiile în care propozițiile sistemului se află în anumite relații între ele.

BIBLIOGRAFIE

1. Avron A., Zamansky A., „Non-Deterministic Semantics for Logical Systems”, *Handbook of Philosophical Logic*, Gabbay D.M., Guenthner F. (eds.), Springer, Heidelberg, 2011, p. 226.
2. Brzozowski J., Esik Z., Iland Y., „Algebras for Hazard Detection”, *Beyond Two: Theory and Application of Multiple-Valued Logic*, Springer, Heidelberg, 2003, p. 3.
3. Dumitriu A., *Logica polivalentă*, Ed. Enciclopedică Română, Bucureşti, 1071.
4. Nievergelt Y., *Foundations of Logic and Mathematics*, Hamiltom P.C., Rensselaer, 2002.