CUANTIFICAREA

IONEL NARIȚA

Termenii sunt expresii folosite pentru a exprima sensuri sau *intensiuni*. De aceea, intensiunea unui termen este constantă, rămâne aceeași în orice context. De asemenea, unui termen îi corespunde o clasă sau o *extensiune*, alcătuită din toate entitățile care satisfac intensiunea termenului. De exemplu, intensiunea termenului „triunghi” este alcătuită din proprietăți precum „figură geometrică”, „are trei laturi”, „suma unghiurilor este de 180^0” etc., iar extensiunea sa conține toate obiectele care au formă triunghiulară. Extensiunea este parametrul variabil al termenilor, respectiv, un termen are extensiuni diferite, în funcție de context.

Dimensiunea extensiunii unui termen este surprinsă prin expresii numite *cuantificatori*.[1] Cu ajutorul cuantificatorilor putem spune dacă, într-un context dat, un termen are extensiunea *mai mare* sau *mai mică* decât altul. Cu alte cuvinte, cuantificatorii exprimă o relație de ordine între extensiunile termenilor.[2] Dacă avem în vedere numai elementele lor, extensiunile nu pot fi ordonate după dimensiune decât în cazuri speciale, când extensiunea unuia este parte a extensiunii altui termen. Cuantificatorii ne permit să comparăm dimensiunile oricăror extensiuni, indiferent dacă au sau nu elemente comune.

După modul în care intensiunea termenului se aplică elementelor extensiunii acestuia, deosebim două tipuri de termeni:

1) Intensiunea termenilor *individualizanți* se aplică doar întregilor și nu părților acestora. De exemplu, termenul „pisică” se aplică doar animalului în întregul său, o parte a unei pisici nu este, la rândul său, pisică. Extensiunile termenilor individualizanți sunt alcătuite din *obiecte*.

2) În cazul termenilor *de masă*, intensiunea se aplică oricărei părți a unui întreg (de regulă, până la nivelul moleculelor). De pildă, termenul „zahăr” este satisfăcut de o cantitate oarecare de zahăr dar și de orice parte a acesteia, iar diviziunea merge până la limita moleculei de zahăr. De această dată, extensiunea unui termen de masă se numește *substanță*.

---

[1] Torza Alessandro, „Introduction”, *Quantifiers, Quantifiers, and Quantifiers*, Torza Alessandro (ed.), Springer, Heidelberg, 2015, p. 1.

[2] Szabolcsi Anna, *Quantification*, Cambridge UP, Cambridge, 2010, p. 8.

1. SISTEMELE (D, F)

Mai întâi, vom studia cuantificatorii specifici termenilor individualizanți. Dacă aplicăm un termen *f* peste un domeniu[3] de obiecte, D = {a_1, a_2, …, a_n}, unele obiecte satisfac termenul, iar altele nu, așa încât, pentru unele obiecte, propozițiile obținute, „fa_i”, sunt adevărate, iar pentru altele sunt false, în funcție de context. Acele obiecte care satisfac termenul *f* constituie extensiunea acestui termen relativ la *D*, respectiv, $fa_i \equiv (a_i \in f)$. Dacă o propoziție este falsă, putem ajunge la o propoziție adevărată înlocuind termenul cu negația acestuia: $(fa_i)^* \equiv f^*a_i$.

Prin urmare, pentru un context dat, obținem o anumită distribuție a termenului *f* și a negației lui peste elementele domeniului *D*:

Tabelul 1.
Distribuția termenului f peste elementele domeniului D

a_1	a_2	a_3	…	a_n
f	f*	f*	…	f

În tabelul de mai sus, propoziții precum „fa_1” și „fa_n” sunt adevărate, pe când „fa_3” este falsă. De asemenea, obiectele a_1 și a_n fac parte din extensiunea termenului *f*, dar a_3 nu aparține extensiunii acestui termen. Modificând contextul, distribuția formelor pozitivă și negativă a termenului *f* peste domeniul *D* se modifică, pentru unele elemente ale lui *D*, termenul pozitiv este înlocuit prin cel negativ sau invers, obținându-se, pentru un domeniu cu *n* elemente, 2^n distribuții ale termenului *f* peste acel domeniu:

Tabelul 2.
Distribuții ale termenului f peste elementele domeniului D

	a_1	a_2	a_3	…	a_n
s_1	f	f	f	…	f
s_2	f*	f	f	…	f
s_3	f	f*	f	…	f
s_4	f*	f*	f	…	f
s_5	f	f*	f*	…	f
…	…	…	…	…	…
s_{2^n}	f*	f*	f*	…	f*

De exemplu, dacă avem în vedere un domeniu alcătuit din trei obiecte, D(3) = {a_1, a_2, a_3}, deosebim opt distribuții distincte:

[3] *Idem*, p. 4.

Tabelul 3.
Sistemul (D(3), f)

	a_1	a_2	a_3
s_1	f	f	f
s_2	f	f	f*
s_3	f	f*	f
s_4	f	f*	f*
s_5	f*	f	f
s_6	f*	f	f*
s_7	f*	f*	f
s_8	f*	f*	f*

Convenim să numim distribuțiile posibile ale unui termen *f* peste un domeniu *D*, *stările* sistemului (D, f), pe care le notăm prin s_i. Pentru fiecare dintre aceste stări, termenul *f* are o extensiune distinctă. Dacă ne oprim la un domeniu cu trei elemente, (*Tabelul 3*), în starea s_1, extensiunea termenului *f* conține toate cele trei obiecte. În starea s_3, extensiunea se limitează la obiectele a_1 și a_3, pentru ca, în starea s_8, extensiunea termenului *f* să fie vidă.

Când trecem de la un context, x_1, la altul, x_2, starea sistemului și, totodată, extensiunea termenului *f* se pot modifica.[4] De pildă, dacă în x_1 sistemul se afla în starea s_8, în contextul x_2, sistemul ar putea ajunge în starea s_7. Bunăoară, dacă aplicăm termenul „astronaut”, cu înțelesul „om care a ajuns în spațiul cosmic”, peste populația Statelor Unite ale Americii, în secolul XIX, extensiunea acestuia era vidă, pe când astăzi, conține numeroase elemente.

Constatăm că schimbările pe care le suferă un sistem, (D, f), sunt perechile de stări în care se poate afla sistemul, respectiv, perechile de distribuții ale termenului *f* peste domeniul *D*. În exemplul nostru, perechi precum (s_3, s_8) sau (s_6, s_5) sunt schimbări. Am obținut că schimbările unui sistem (D, f) sunt elementele produsului cartezian S^2, unde *S* reprezintă clasa stărilor posibile ale sistemului (D, f). O mulțime de schimbări care alcătuiesc o *funcție* reprezintă o *transformare*. Cu alte cuvinte, o transformare este o funcție $T: S \rightarrow S$.

Schimbările de stare ale unui sistem (D, f) pot avea loc pe două căi:

1) Schimbări prin permutarea argumentelor a_i. De exemplu, schimbarea (s_2, s_3) are loc prin permutarea argumentelor a_2 și a_3. Pe când starea s_2 este descrisă prin propoziția „fa_1 & fa_2 & $f{*}a_3$”, stării s_3 îi corespunde propoziția: „fa_1 & $f{*}a_2$ & fa_3”. Se constată cu ușurință că a doua propoziție este obținută din prima dacă permutăm între ele argumentele a_2 și a_3. Nu orice permutare duce la o schimbare de stare. De pildă, dacă în s_2 am permuta a_1 cu a_3 nu s-ar petrece nici o schimbare. Obținem o schimbare prin permutarea argumentelor numai dacă aceasta are loc între ocurențe de calitate diferită ale termenului, respectiv, între o ocurență pozitivă și una negativă sau invers. De aceea, pentru stările s_1 și s_8 ale sistemului (D(3), f),

[4] Stanley Janson, Williamson Timothy, „Quantifiers and Context-dependence”, *Analysis*, 55, 4, 1995, p. 291.

nici o permutare a argumentelor nu generează schimbări de stare, odată ce toate ocurențele termenului *f* au aceeași calitate.

2) Există schimbări care nu pot fi obținute prin permutarea argumentelor. De exemplu, schimbarea (s_1, s_2) nu rezultă prin nici o permutare a argumentelor. De această dată, intervine schimbarea calității unei ocurențe a termenului. În acest caz, ocurența termenului *f* pentru argumentul a_3 devine negativă din pozitivă. Pot fi două tipuri de schimbări de calitate a argumentelor, pozitiv – negativ și negativ – pozitiv. În primul caz, spunem că are loc o modificare *negativă* a ocurenței termenului *f*, iar în al doilea, o modificare *pozitivă*. Modificarea calității unui termen se obține prin negație. În cazul modificării pozitive, negația se aplică unei ocurențe negative a termenului, iar în cazul celei negative, negația este aplicată ocurențelor pozitive.

Dacă modificăm pozitiv o ocurență a unui termen și negativ aceeași sau o altă ocurență, ajungem la situația de mai sus, a schimbărilor prin permutare. Într-adevăr, dacă pentru argumentul a_i termenul își schimbă ocurența de la pozitiv la negativ și dacă pentru argumentul a_j schimbarea are loc de la negativ la pozitiv, rezultatul este același cu schimbarea locurilor celor două argumente între ele:

$$\begin{array}{l} \ldots fa_i \ldots f^*a_j \ldots \\ \ldots f^*a_i \ldots fa_j \ldots \end{array} \qquad (1)$$

De aceea, am putea spune că schimbările stărilor unui sistem (D, f) au loc doar prin schimbarea calității ocurențelor termenului *f*. Dacă fiecărei schimbări pozitive îi corespunde o schimbare negativă de aceeași amplitudine și reciproc, atunci schimbarea de stare este de tipul (1), în schimb, dacă există schimbări pozitive ale ocurențelor termenului *f* fără corespondent în cele negative sau invers, atunci au loc schimbări de stare din categoria (2).

Urmează că, utilizând criteriul permutării argumentelor, obținem clase de echivalență ale stărilor sistemului (D, f). O asemenea clasă este alcătuită din toate stările care pot fi obținute una din alta prin permutări ale argumentelor. De pildă, pentru un domeniu alcătuit din trei elemente, ca în exemplul de mai sus, criteriul permutării argumentelor generează următoarele clase: $\{s_1\}$, $\{s_2, s_3, s_5\}$, $\{s_4, s_6, s_7\}$, $\{s_8\}$.[5] Vom spune despre aceste clase că au în comun *structura* sistemului[6], respectiv, sistemul (D, f) aflat într-una dintre stările unei clase de acest tip, are aceeași structură, iar elementele clasei sunt *echistructurale*. Se dovedește ușor că relația de echistructuralitate este de echivalență (reflexivă, simetrică și tranzitivă), divizând stările sistemului (D, f) în clase de echivalență, cum am văzut. De asemenea, structura stărilor sistemului (D, f) este invariantă la permutarea argumentelor.

---

[5] Szabolcsi Anna, *op. cit.*, p. 8.

[6] Vorbim despre structura sistemului (D, f) deoarece termenii sunt expresii structurale, care dau structura limbajului. De aceea, structura unui sistem (D, f) este dată de modul în care termenul „f" se distribuie peste elementele domeniului *D*.

Dacă avem în vedere doi termeni, *f* și *g*, aplicați aceluiași domeniu, respectiv, sistemele (D, f) și (D, g), stările acestora sunt *echivalente* în cazul în care calitățile celor doi termeni coincid cu privire la aceleași argumente. De exemplu, stările fff* și ggg*, pentru un domeniu cu trei elemente, sunt echivalente, adică, echivalența între stările date de doi termeni are loc dacă, substituind unul dintre termeni prin celălalt, obținem o stare identică. În exemplul dat, dacă *g* este înlocuit cu *f*, ajungem la aceeași stare, fff*. Putem defini relația de echistructuralitate între doi termeni diferiți astfel:

Două stări ale sistemelor (D, f) și (D, g) sunt echistructurale dacă și numai dacă există o permutare a argumentelor astfel încât cele două stări să fie echivalente.

De pildă, stările ff*f* și g*gg* sunt echistructurale pentru că ele sunt echivalente pentru permutarea (a_2, a_1, a_3) în sistemul (D(3), g), când obținem fa_1 & f^*a_2 & f^*a_3, pe de o parte și ga_1 & g^*a_2 & g^*a_3, pe de alta, unde echivalența este evidentă. Prin urmare, toți termenii fac parte din diferite clase echistructurale. Ca orice alte clase, acestea pot fi considerate ca extensiuni ale unor termeni care, de această dată, au ca elemente alți termeni. În acest fel, putem introduce definiția:

Se numește *cuantificator*, orice termen care are ca extensiune o clasă echistructurală de termeni.

De pildă, termenul *f* aparține extensiunii aceluiași cuantificator pentru stările sistemului (D(3), f) din aceeași clasă echistructurală, cum este {s_2, s_3, s_5}. În schimb, în stările s_3 și s_7, termenul *f* aparține extensiunilor a doi cuantificatori diferiți. Vedem că, la fel ca pentru orice alți termeni, extensiunile cuantificatorilor se schimbă de la un context la altul; extensiunea unui cuantificator se comportă la fel ca extensiunea oricărui alt termen, nu este eternă.[7]

Datorită faptului că structura sistemului (D, f) se schimbă prin modificarea calității unei ocurențe a termenului *f*, înseamnă că termenul *f* trece de la un cuantificator la altul tocmai prin acest procedeu. Prin urmare, obținem noi cuantificatori modificând ocurențele unui termen oarecare relativ la elementele domeniul *D*. Am văzut că sunt posibile două tipuri de modificări calitative, negativ – pozitiv și pozitiv – negativ. În primul caz, vom spune că obținem un cuantificator *mai mare*, iar în al doilea, un cuantificator *mai mic*. Cu alte cuvinte, în prima variantă, cuantificatorul crește, iar în a doua, acesta scade. Pe de altă parte, transformarea negativ – pozitiv este inversa transformării pozitiv – negativ, dacă ele sunt ambele aplicate, avem de-a face cu o permutare, când, după cum am văzut, structura se conservă și termenul satisface acelaşi cuantificator. Definim relația „mai mare”, *M*, între cuantificatori în felul următor:

[7] Feferman Solomon, „Which Quantifiers are Logical? A Combined Semantical and Inferential Criterion”, *Quantifiers, Quantifiers, and Quantifiers*, Torza Alessandro (ed.), Springer, Heidelberg, 2015, p. 19.

Cuantificatorul c_1 este mai mare decât cuantificatorul c_2 dacă și numai dacă, un element din c_2 poate fi obținut dintr-un element din c_1 printr-o succesiune de transformări pozitive.

Relația *M* este de ordine deoarece:

1) *M* este antireflexivă: M*cc. Într-adevăr, dacă am aplica o transformare pozitivă unui element al extensiunii cuantificatorului *c*, am obține un termen din extensiunea unui alt cuantificator.

2) *M* este antisimetrică: $Mc_1c_2 \supset M^*c_2c_1$. Dacă presupunem că Mc_1c_2, înseamnă că elementele cuantificatorului c_2 sunt obținute din cele ale cuantificatorului c_1 prin transformări pozitive, de unde urmează că, pentru a obține elementele lui c_1 din acelea ale cuantificatorului c_2 ar trebui să aplicăm transformări negative. Prin urmare, în ipoteza dată, c_2 nu poate fi mai mare decât c_1.

3) *M* este tranzitivă: $(Mc_1c_2 \ \& \ Mc_2c_3) \supset Mc_1c_3$. Potrivit antecedentului, c_2 este obținut din c_1 printr-o transformare pozitivă și, la fel, c_3 rezultă din c_2 printr-o transformare pozitivă. Compusa a două transformări pozitive este pozitivă, prin urmare, c_3 rezultă din c_1 aplicând o transformare pozitivă, dovedind că din antecedent rezultă necesar consecventul.

În concluzie, mulțimea cuantificatorilor poate fi strict ordonată cu ajutorul relației *M*. Inversa relației „mai mare" este relația „mai mic" și are aceleași proprietăți, sub condiția de a înlocui transformarea calitativă pozitivă cu aceea negativă.

2. CUANTIFICATORI

Cuantificatorii relativ la un domeniu *D* alcătuiesc o scală, sunt incompatibili și complementari. Cu alte cuvinte, relativ la un context dat, nu există nici un termen care să aparțină la doi cuantificatori diferiți și nu există nici un termen care să nu aparțină vreunui cuantificator.[8] Dacă un termen ar satisface doi cuantificatori diferiți, relativ la același context, ar urma că există cel puțin o ocurență a termenului respectiv atât pozitivă cât și negativă având același argument în același context, ajungând la contradicția $fa_i \ \& \ f^*a_i$. De asemenea, dacă vreun termen, *f*, nu ar aparține niciunui cuantificator, ar exista cel puțin un argument, a_i, pentru care nu ar avea loc nici fa_i nici f^*a_i, încălcându-se principiul terțului exclus.

Putem obține toți cuantificatorii posibili peste un domeniu procedând în felul următor:

1) Alegem un termen oarecare *f* și pornim de la starea în care toate ocurențele lui *f* sunt negative, să spunem, f*f*f*, pentru un domeniu cu trei elemente. Numim această stare *origine*, *r*. De asemenea, dintre transformările pozitive posibile asupra originii, ne oprim la transformarea care se aplică asupra unei singure ocurențe a termenului *f*, pe care o numim transformare *unitate*, *U*.

[8] Shin Sun-Joo, „Quantifiers are Logical Constants, but Only Ambigously", *Quantifiers, Quantifiers, and Quantifiers*, Torza Alessandro (ed.), Springer, Heidelberg, 2015, p. 51.

2) Asupra primei ocurențe din origine, aplicăm transformarea unitate, obținând starea Ur = ff*f*, aparținând extensiunii unui alt cuantificator, diferit de acela al originii. Celelalte elemente ale cuantificatorului respectiv, le obținem prin permutări ale argumentelor, și anume, f*ff*și f*f*f.

3) Asupra primei ocurențe negative a termenului *f* din starea Ur aplicăm din nou transformarea *U*, ajungând la starea UUr = fff*, din extensiunea unui cuantificator superior etc. În acest fel, obținem elemente ale tuturor cuantificatorilor posibili.

Prin urmare, dacă *U* reprezintă transformarea pozitivă a unui element dintr-o stare a unui sistem (D, f) și r = f*f*f*…f*… (având toate ocurențele negative) reprezintă starea origine a sistemului respectiv, cuantificatorii relativi la acest sistem sunt corespunzători șirului obținut prin iterația transformării *U* asupra originii: r, Ur, UUr, UUUr, …, UUU…U…r etc. Pentru a nota iterațiile transformării *U*, folosim expresii numite *numere*:

r = 0Ur (transformarea *U* nu se aplică). (2)
Ur = 1Ur (transformarea *U* se aplică o dată).
UUr = 2Ur (*U* se aplică de două ori).
…
UU…Ur = nUr (*U* se aplică de *n* ori).

Pentru fiecare dintre aceste stări, *f* aparține extensiunii unui cuantificator diferit, de aceea, putem utiliza numerele respective pentru a nota cuantificatorii, potrivit convenției (nU)f $=_{not}$ nf, respectiv: 0f, 1f, 2f …, nf, cu înțelesul „*f* aparține cuantificatorului *0* relativ la domeniul *d*”[9], „*f* aparține cuantificatorului *1* relativ la domeniul *D*”, …, „*f* aparține cuantificatorului *n* relativ la domeniul *D*”.[10] Un cuantificator *n* are intensiunea „termen a cărui extensiune are *n* elemente relativ la domeniul *D*”, iar extensiunea sa conține toți termenii care conțin, în extensiunea lor, *n* elemente ale domeniului *D*. De aceea, expresiile „nf”, unde *n* este un cuantificator, iar *f* este un termen, sunt propoziții cu înțelesul: „Extensiunea termenului *f* are *n* elemente (relativ la domeniul *D*)”. La limită, domeniul *D* poate fi universul, când propozițiile de acest tip sunt de existență: „Există *n* obiecte care sunt *f*”.[11]

Obținem propoziții de existență și în situația în care domeniul este tocmai extensiunea termenului *f*, adică, dacă avem în vedere un sistem (f, f). De exemplu, propoziția „nf” este interpretată în sistemul (f, f) ca însemnând „*n* obiecte din *f* sunt *f*”, dar, deoarece *f* este singurul termen care conține obiecte care sunt *f*, altă interpretare este „Există *nf*”.

Transformarea *U* se aplică atâta vreme cât există o ocurență negativă. Dacă toate ocurențele sunt pozitive atunci *U* nu mai are efect și ajungem la limita superioară a cuantificatorilor relativ la un domeniu *D*. Cuantificatorul cel mai mare

---

[9] Acolo unde nu este pericol de confuzie, domeniul se subînțelege. De fiecare dată, însă, trebuie avut în vedere domeniul, deoarece transformarea unitate este definită relativ la un sistem (D, f).

[10] Glockner Ingo, *Fuzzy Quantifiers*, Springer, Berlin, 2006, p. 12.

[11] *Idem*, p. 3.

conţine acei termeni care au toate ocurenţele pozitive relativ la domeniul D. În locul stării cu toate ocurenţele negative, poate fi aleasă ca origine starea cu toate ocurenţele pozitive. De această dată, transformarea care trebuie aplicată este transformarea negativă corespunzătoare unităţii, $U^{-1} = -U$, iar cuantificatorii sunt generaţi descrescător. Mai mult, ne putem opri la orice stare care să joace rolul de origine, când cuantificatorii sunt obţinuţi aplicând atât transformarea pozitivă cât şi transformarea negativă, fiind reprezentaţi prin numere *întregi*, conform regulii:

1) Cuantificatorul originii este reprezentat prin *zero*.

2) Cuantificatorii mai mari decât originea sunt reprezentaţi prin numere pozitive.

3) Cuantificatorii mai mici decât originea sunt reprezentaţi prin numere negative.

De exemplu, dacă în sistemul (D(3), f), alegem ca origine starea (ff*f*), atunci obţinem cuantificatorii: -1, 0, 1, 2. Nimic nu ne împiedică să utilizăm şi alte expresii, diferite de numere, pentru cuantificatori dar, de fiecare dată, aceste expresii vor dobândi o ordine strictă, în acord cu ordinea cuantificatorilor reprezentaţi. Ordinea nu este a numerelor ci a înţelesurilor numerelor.

În realitate, într-un context dat, se realizează doar o stare a sistemului (D, f), dar, din extensiunea unui cuantificator, pot face parte mai multe stări. Dacă ne oprim la o propoziţie cuantificată de forma „nf" şi presupunem că n conţine stările $s_1, s_2, \ldots, s_m$, dintre care numai una se realizează în contextul x, atunci $nf \equiv s_1 \vee s_2 \vee \ldots \vee s_m$. De pildă, dacă D conţine trei elemente, ca mai sus, iar $n = 2$, atunci, propoziţia 2f este, de fapt, propoziţia $s_2 \vee s_3 \vee s_5$, adică:

$$2f = (fa_1 \,\&\, fa_2 \,\&\, f^*a_3) \vee (fa_1 \,\&\, f^*a_2 \,\&\, fa_3) \vee (f^*a_1 \,\&\, fa_2 \,\&\, fa_3). \qquad (3)$$

Pentru cuantificatorul maxim, care are toate ocurenţele pozitive, există o singură stare a sistemului (D, f), deoarece toate permutările, în acest caz, sunt neproductive. Prin urmare, dacă h este cuantificatorul maxim, atunci: $hf \equiv fa_1 \,\&\, fa_2 \,\&\, fa_3 \ldots fa_h$.[12] La fel, cuantificatorul minim sau nul, reprezintă o singură stare, prin urmare, propoziţia „0f" este $0f \equiv f^*a_1 \,\&\, f^*a_2 \,\&\, f^*a_3 \ldots f^*a_h$. Există sisteme care nu admit un cuantificator maxim; de pildă, în cazul sistemului (expresie, număr natural), nu există un asemenea cuantificator pentru că oricând rămân ocurenţe negative ale termenului „număr natural", respectiv, oricând poate fi construită o nouă expresie din clasa acestuia. De pildă, dacă prin n am reprezenta cuantificatorul maxim, oricând putem construi cuantificatorul $n + 1$, mai mare decât n. Cu alte cuvinte, când spunem că numerele naturale sunt *infinite*, nu înseamnă că ar exista vreun număr „infinit" ci, deşi toate numerele naturale sunt finite, nu există un număr „cel mai mare".

Dacă domeniul D este, la rândul său, extensiunea unui termen[13], pe care îl notăm cu d, atunci, într-un sistem oarecare, (D, f), cuantificatorul maxim conţine

---

[12] Baldwin Thomas, „Interpretations of Quantifiers", *Mind*, 88, 1, 1979, p. 215.

[13] Domeniul poate fi extensiune a unui termen sau compus din denotatele unor nume. De exemplu, dacă D = {Ioan, Ion, Ionel}, propoziţia „2f" devine, relativ la acest domeniu, „Doi dintre Ioan, Ion sau Ionel sunt *f*". În acest caz, domeniul rămâne acelaşi în orice context.

acei termeni care se aplică tuturor elementelor din *D*, de aceea, „hf” mai poate fi citit „Toți *d* sunt *f*”, unde „toți *d*” ține locul cuantificatorului maximal.[14] Acest cuantificator, numit cuantificatorul universal-afirmativ, este variabil, deoarece poate avea orice valoare, în funcție de câte elemente are domeniul *D*, respectiv, de cuantificatorul termenului *d* în raport cu domeniul *D* sau cu universul.[15] Potrivit celor de mai sus, propoziția „Toți *d* sunt *f*” poate fi reprezentată prin conjuncția $\&_i fa_i$, unde *i* merge de la 1 la *h*, iar dacă ținem seama că a_i sunt elemente ale extensiunii termenului *d*, obținem:

Toți *d* sunt *f* $\equiv \&_i(da_i \supset fa_i)$, unde a_i parcurge toate elementele universului. (4)

În mod analog, se folosește cuantificatorul universal-negativ pentru cuantificatorul nul, respectiv: 0f ≡ „Nici un *d* nu este *f*”. Spre deosebire de cel afirmativ, cuantificatorul universal-negativ are o singură valoare, indiferent de domeniu sau context. Prin negarea propozițiilor cuantificate universal obținem propoziții cuantificate *particular*: „Unii *d* nu sunt *f*” este negația propoziției universal-pozitive, iar „Unii *d* sunt *f*”, este negația propoziției universal-negative.[16] Aparent, în propozițiile *I* și *O* avem de-a face cu un singur cuantificator, „unii”, dar am putea să deosebim, în ciuda exprimării, între un cuantificator particular-negativ și unul particular-pozitiv, similar cuantificatorilor universali.

Pe aceleași considerente, putem asocia oricărui cuantificator un tip de propoziție categorică, unde termenul corespunzător domeniului avut în vedere să joace rolul de subiect. Bunăoară, propoziția „nf”, relativ la domeniul *D*, poate fi exprimată prin „*nd* sunt *f*”. Invers, orice categorică poate fi exprimată considerând extensiunea termenului subiect drept domeniu. Astfel, propoziția „*kS* sunt *P*” devine „kP”, raportându-ne la sistemul (s, p).

Deși, pentru termenii individualizanți, există o unitate naturală, putem alege ca unitate orice altă transformare. Pentru orice asemenea alegere s-ar obține o altă serie de cuantificatori. De pildă, am putea alege ca unitate transformarea pozitivă H = hU, care schimbă calitatea tuturor ocurențelor negative ale termenului *f* relativ la *D*. Transformarea *H* este aplicabilă numai originii deoarece numai în origine, *f* are *h* ocurențe negative. În acest caz, obținem:

$$\begin{aligned} r &= 0Hr \\ d &= 1Hr \end{aligned} \qquad (5)$$

Originii îi corespunde cuantificatorul nul, iar termenului *d* al domeniului îi corespunde cuantificatorul *1*. Pentru a determina ceilalți cuantificatori ai sistemului (D, f), introducem operația de *diviziune* a transformărilor, *δ*, inversă operației de iterație, astfel: dacă $T_1 = i^n T_2$, atunci $T_2 = \delta^n T_1$. Ținând seama că diviziunea este inversă față de iterație, obținem:

[14] Goldblatt Robert, *Quantifiers, Propositions and Identity*, Cambridge UP, Cambridge, 2011, p. 19.

[15] Glockner Ingo, *op. cit.*, p. 3.

[16] *Idem*, p. 7.

Dacă $T_1 = nT_2$ atunci $T_2 = n^{-1}T_1$, putând utiliza notația: (6)

$n^{-1}T_1 =_{not} (1/n)T_1$.

Dacă *T* este o transformare astfel încât H = nT, atunci acesteia îi corespunde cuantificatorul (1/n)H. În acest fel, obținem cuantificatorii subunitari: 0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, …, 1/n. Ținând seama că toate aceste transformări pot fi, la rândul lor, iterate, rezultă cuantificatorii *raționali*, de forma (m/n)f.[17] Iată câteva exemple:

(1/2)f = „Jumătate din *d* sunt *f*” (7)
(1/3)f = „O treime din *d* sunt *f*”
(2/5)f = „Două cincimi din *d* sunt *f*” etc.

După cum am văzut, cuantificatorii numerici sunt incompatibili; propozițiile „nf” și „mf”, unde *n* și *m* sunt cuantificatori diferiți, sunt contrare. De aceea, conjuncția oricăror două propoziții cuantificate numeric este o contradicție. În schimb, asemenea propoziții pot fi legate prin disjuncție, când obținem noi cuantificatori:

$$nf \vee mf = (n \vee m)f \quad (8)$$

În acest caz, compunem sumativ cuantificatorii, respectiv, extensiunea cuantificatorului compus este reuniunea extensiunilor cuantificatorilor compuși. De pildă, prin disjuncția propozițiilor „2f” și „3f”, obținem propoziția „(2 sau 3)f”. Expresia corespunzătoare cuantificatorilor sumativi se obține prin disjuncția cuantificatorilor compuși. De pildă, dacă avem în vedere domeniul cu trei elemente, obținem:

$$(2 \vee 3)f = (fa_1 \,\&\, fa_2 \,\&\, f^*a_3) \vee (fa_1 \,\&\, f^*a_2 \,\&\, fa_3) \vee (f^*a_1 \,\&\, fa_2 \,\&\, fa_3) \quad (9)$$
$$\vee\, (fa_1 \,\&\, fa_2 \,\&\, fa_3)$$

Cuantificatorul respectiv mai poate fi exprimat prin „Cel puțin 2f”, ținând seama că „3” este cuantificatorul maxim. Cuantificatorii sumativi îmbracă forme dintre cele mai diverse: „Cel puțin *n*”, „Cel mult *n*”, „Între *n* și *m*”, „Între *n* și *m* sau între *p* și *q*” etc. De pildă, cuantificatorii particulari se înscriu în această categorie: „Unii *d* sunt *f*” înseamnă „Cel puțin un *d* este *f*” sau „Unii *d* nu sunt *f*” este același lucru cu „Cel mult (*h-1*)*d* sunt *f*”, sau cu „Mai puțini decât *hd* sunt *f*”, unde *h* este cuantificatorul termenului *d* relativ la extensiunea sa.
Orice cuantificator poate fi exprimat prin „cel mult” sau „cel puțin”.[18] De pildă, „nf” devine „cel mult *nf* și cel puțin *nf*”. Dacă revenim la domeniul cu trei elemente, „cel mult 2f și cel puțin 2f” înseamnă:

$$(0 \vee 1 \vee 2)f \,\&\, (2 \vee 3)f = ((0 \vee 1 \vee 2) \,\&\, (2 \vee 3))f = 2f \quad (10)$$

[17] *Idem.*
[18] *Idem.*

Negația cuantificatorului „cel puțin nf” este „cel mult (n-1)f” iar negația lui „cel mult nf” este „cel puțin (n+1)f”. Să ne oprim la ultima relație:

$$\text{„cel mult nf”} = (0 \vee 1 \vee 2 \vee \dots \vee n)f \quad (11)$$
$$(\text{„cel mult nf”})^* = (0 \vee 1 \vee 2 \vee \dots \vee n)^*f = (n+1 \vee n+2 \vee \dots \vee h)f$$
$$(n+1 \vee n+2 \vee \dots \vee h)f = \text{„cel puțin (n+1)f”}$$

Dacă ținem seama de posibilitatea de a exprima cuantificatorii prin „cel mult” și „cel puțin”, rezultă că negația unui cuantificator poate fi exprimată în același fel. De pildă:

$$2f = (\text{Cel mult 2 și cel puțin 2})f \quad (12)$$
$$2^*f = (\text{Cel mult 2 și cel puțin 2})^*f$$
$$2^*f = (\text{Cel puțin 3 sau cel mult 1})f = ((0 \vee 1) \vee (3 \vee 4 \vee \dots \vee h))f$$

Pe lângă cuantificatorii care rezultă prin disjuncția altor cuantificatori, sunt utilizați și cuantificatori vagi[19], pentru a exprima diferite grade de nesiguranță sau necunoaștere[20], cum sunt „mulți”, „puțini”[21], „cei mai mulți”, „aproape toți” „indiferent câți” etc.[22] Cel mai înalt grad de imprecizie este atins prin „nu știm câți”.

3. CALCULUL CUANTIFICATORILOR

Putem calcula cuantificatorul unui termen compus folosind ecuația: $(f) + (g) = (fg) + (f \vee g)$, unde prin (f) am notat cuantificatorul termenului *f*. Cu alte cuvinte, suma cuantificatorilor a doi termeni, relativ la același domeniu, este aceeași cu suma dintre cuantificatorul compusului conjunct și a compusului sumativ a celor doi termeni. De exemplu, dacă termenii ar fi „elev cu nota 10 la română” și „elev cu nota 10 la biologie” (referindu-ne la elevii din aceeași clasă) atunci, suma dintre numărul elevilor care au nota zece la română și a celor care au nota 10 la biologie, este același cu suma dintre numărul elevilor care au nota 10 atât la română cât și la biologie și numărul celor care au nota zece la cel puțin una dintre ele.

Cuantificatorii sunt implicați în trei tipuri de propoziții, de stare, de schimbare și de transformare. Propozițiile de stare au sintaxa „nf”, respectiv, „*nd* sunt *f*”. Sintaxa propozițiilor de schimbare este „$(n, m)(x_1, x_2)f$”, sau „În contextul x_1 *nd* sunt f, iar în contextul x_2 *md* sunt f” sau „De la x_1 la x_2 numărul obiectelor din *D* care sunt *f* s-a schimbat de la *n* la *m*”. În cazul propozițiilor de transformare, sintaxa este „$nU(x_1, x_2)f$”, adică, „De la contextul x_1 la contextul x_2 numărul obiectelor din *D* care sunt *f* s-a modificat cu *n*”.

---

[19] *Idem*, p. 2.

[20] Swanson Eric, „On Scope Relations between Quantifiers and Epistemic Modals”, *Journal of Semantics*, 27, 4, p. 529.

[21] Glockner Ingo, *op. cit.*, p. 20.

[22] Szabolcsi Anna, *op. cit.*, p. 8.

Deosebim două tipuri de propoziții de transformare, de *creștere* și de *scădere*. Avem de-a face cu o creștere când transformarea este pozitivă și are loc o scădere în cazul transformărilor negative. De pildă, propoziția „De la contextul x_1 la contextul x_2 numărul elementelor din *D* care sunt *f* a crescut cu doi”, este o propoziție de creștere, presupune că transformarea „2U” este aplicată cuantificatorului termenului *f* din x_1 în intervalul (x_1, x_2). Dacă ne referim doar la contextele care se realizează, le putem înlocui cu momentele realizării lor, ținând seama că, pentru un evaluator dat, la fiecare moment, se realizează un singur context.

Dacă pornim de la supoziția că o propoziție de stare este adevărată într-un anumit context, putem obține, prin *inferență*, o altă propoziție de stare adevărată relativ la acel context, drept concluzie a inferenței. De exemplu, dacă presupunem că în sistemul (s, p) are loc „*ns* sunt *p*” atunci în sistemul (p, s), este adevărată propoziția „*np* sunt *s*”, respectiv, prin *conversiune*, cuantificatorul rămâne același deoarece, conform principiului conservării extensiunii, relativ la același context, orice ocurență a unui termen are aceeași extensiune. În cazul de mai sus, dacă are loc „*ns* sunt *p*”, înseamnă că termenul compus *sp* are cuantificatorul *n*, ori compunerea conjunctă este comutativă, prin urmare, *ps* este același termen ca și *sp*, deci trebuie să aibă aceeași extensiune și, totodată, același cuantificator.

Situația se schimbă în cazul cuantificatorului universal-afirmativ care, după cum am văzut, nu are o valoare unică. Din „Toți *s* sunt *p*” nu rezultă „Toți *p* sunt *s*” deoarece, în primul caz, toți = s, pe când, în al doilea, toți = p. De aceea, conversiunea corectă este: toți *s* sunt *p*, deci *sp* sunt *s*. De pildă, dacă „Toți elevii din clasa a V-a au luat nota 10 la purtare”, nu înseamnă că toți cei care au luat nota 10 la purtare sunt în clasa a V-a ci, dacă în clasa a cincea sunt 30 de elevi, obținem, prin conversiune, „30 de elevi care au luat nota 10 la purtare sunt în clasa a V-a”.

Un silogism de figura I, Q_2sm, Q_1mp/ Q_0sp, satisface relațiile:

$$smpC_7 \ \&\ smp^*C_6 \ \&\ sm^*pC_5 \ \&\ sm^*p^*C_4 \ \&\ s^*mpC_3 \ \&\ s^*mp^*C_2 \ \&\ s^*m^*pC_1 \ \&\ s^*m^*p^*C_0 \quad (13)$$

$$Q_2 = C_7 + C_6$$

$$Q_1 = C_7 + C_3$$

$Q_0 = C_7 + C_5$, unde Q_i și C_i sunt cuantificatori.

Cuantificatorul concluziei s – p, este: $Q_0 = C_7 + C_5$, astfel încât:

$$Q_0 = (Q_2 - C_6) + C_5 \text{ sau} \quad (14)$$

$$Q_0 = (Q_1 - C_3) + C_5.$$

Pentru a obține o concluzie de forma „Cel mult Q_2s sunt *p*”, trebuie ca $C_5 = 0$, respectiv, premisa majoră trebuie să aibă forma „Nici un *m** nu este *p*”, ajungând la modul valid: „Q_2s sunt *m* și nici un *m** nu este *p*/ cel mult Q_2s sunt *p*”. În schimb, concluzia „Cel puțin Q_2s sunt *p*” rezultă dacă $C_6 = 0$, adică, majora este universal-afirmativă: „Q_2s sunt *m* și toți *m* sunt *p*/ cel puțin Q_2s sunt *p*”. După aceeași metodă, putem obține condițiile pentru validitatea tuturor modurilor silogistice.

Dacă premisa conține propoziții de stare relative la contexte diferite, atunci concluzia poate fi o propoziție de schimbare sau o propoziție de transformare:

ns sunt *p* la momentul t_1 și *ms* sunt *p* la momentul t_2/ Numărul de *s* care sunt *p* s-a schimbat de la *n* la *m* de la momentul t_1 la momentul t_2. (15)

ns sunt *p* la momentul t_1 și *ms* sunt *p* la momentul t_2/ Numărul de *s* care sunt *p* s-a modificat cu (m – n) de la momentul t_1 la momentul t_2.

De exemplu, dacă n = 10 și m = 15, atunci inferențele de mai sus devin:

10s sunt *p* la momentul t_1 și *15s* sunt *p* la momentul t_2/ Numărul de *s* care sunt *p* s-a schimbat de la *10* la *15* de la momentul t_1 la momentul t_2. (16)

10s sunt *p* la momentul t_1 și *15s* sunt *p* la momentul t_2/ Numărul de *s* care sunt *p* a crescut cu *5* de la momentul t_1 la momentul t_2.

Dacă premisa conține o propoziție de stare și una de schimbare sau de transformare, rezultă o propoziție de stare:

ns sunt *p* la momentul t_1 și numărul de *s* care sunt *p* s-a schimbat de la *n* la *m* de la momentul t_1 la momentul t_2/ *ms* sunt *p* la momentul t_2. (17)

ns sunt *p* la momentul t_1 și numărul de *s* care sunt *p* s-a modificat cu *m* de la momentul t_1 la momentul t_2/ (n + m)*s* sunt *p* la momentul t_2.

Dacă luăm ca exemplu aceleași valori pentru cuantificatori ca mai sus, obținem inferențele:

10s sunt *p* la momentul t_1 și numărul de *s* care sunt *p* s-a schimbat de la *10* la *15* de la momentul t_1 la momentul t_2/ *15s* sunt *p* la momentul t_2. (18)

10s sunt *p* la momentul t_1 și numărul de *s* care sunt *p* a crescut cu *5* de la momentul t_1 la momentul t_2/ *15s* sunt *p* la momentul t_2.

Aceste raționamente se bazează pe următoarele legi logice aplicabile într-un sistem (s, p):

$$((n, t_1)p \ \& \ (m, t_2)p) \supset (n, m)(t_1, t_2)p \qquad (19)$$
$$((n, t_1)p \ \& \ (m, t_2)p) \supset (m - n)(t_1, t_2)Up$$
$$((n, t_1)p \ \& \ (n, m)(t_1, t_2)p) \supset (m, t_2)p$$
$$((n, t_1)p \ \& \ m(t_1, t_2)Up) \supset (n + m, t_2)p.$$

Dacă domeniul, *S*, este o substanță, adică, *S* este extensiunea unui termen de masă, nu există o transformare unitate naturală, prin urmare, transformarea unitate, pentru un sistem (S, f) trebuie aleasă convențional. De pildă, se poate alege ca unitate transformarea care schimbă originea în termenul de masă *s* care are tocmai extensiunea *S*. În acest caz, obținem pentru sistemul (S, f) cuantificatori raționali subunitari. De exemplu, dacă *S* reprezintă o cantitate de zahăr, iar f = umed, putem formula propoziții precum: „Întreaga cantitate de zahăr este umedă" sau „Jumătate din cantitatea de zahăr este umedă", „Două treimi din cantitatea de zahăr este umedă" etc.

Pe de altă parte, am putea alege o unitate oarecare în mod convențional, pe care să o iterăm sau să o divizăm, obținând cuantificatori raționali. De pildă, o asemenea unitate ar putea fi denumită *kilogram*, obținând, în sistemul (zahărul din depozitul *Z*, umed), cuantificatori precum „Un kilogram de zahăr din depozitul *Z* este umed", „Jumătate de kilogram de zahăr din depozitul *Z* este umed" etc. Cu ajutorul acestor propoziții, construim inferențe asemănătoare celor de mai sus:

Dimineața, 10 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed iar seara, 15 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed/ Cantitatea de zahăr umed din depozitul *Z* s-a schimbat de la 10 kg la 15 kg de dimineața până seara. (20)

Dimineața, 10 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed iar seara, 15 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed/ Cantitatea de zahăr umed din depozitul *Z* a crescut cu 5 kg de dimineața până seara.

Dimineața, 10 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed iar cantitatea de zahăr umed din depozitul *Z* s-a schimbat de la 10 kg la 15 kg de dimineața până seara/ Seara, 15 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed.

Dimineața, 10 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed iar cantitatea de zahăr umed din depozitul *Z* a crescut cu 5 kg de dimineața până seara/ Seara, 15 kg de zahăr din depozitul *Z* era umed.

Propozițiile pot fi cuantificate în același fel ca și termenii. Conform *principiilor logicii*, o propoziție este adevărată sau falsă în raport cu un context anume. Prin urmare, propozițiile se comportă față de clasa contextelor în același fel cum termenii se comportă față de diferite domenii de obiecte. Prin urmare, putem cuantifica o propoziție relativ la un domeniu de contexte. Ținând seama că, determinând evaluatorul, contextele care se realizează depind doar de timp, propozițiile pot fi cuantificate relativ la timp, ajungând la sisteme (A, p), unde *A* este un interval de timp, iar *p* este o propoziție.[23]

Iată câteva exemple de cuantificatori în cadrul unui sistem (A, p): „În intervalul *A*, *p* a avut loc o singură dată", „În intervalul *A*, *p* a avut loc de *n* ori", „În orice moment din *A* are loc *p*", „Niciodată pe parcursul *A* nu a avut loc *p*" etc. Pot fi utilizați și cuantificatori raționali: „În jumătate din intervalul *A* a avut loc *p*", „Timp de două treimi din *A*, „p" a fost adevărată" etc.[24] De această dată, cuantificatorii sunt termeni cu extensiunea alcătuită din propoziții.

Constatăm că numerele, ca expresii, nu au peste tot același înțeles deoarece sintaxa lor diferă.[25] De pildă, în propoziția „Doi elevi au sărit un gard de doi metri

[23] Sider Theodore, „Quantifiers and Temporal Ontology", *Mind*, 115, 457, 2006, p. 75.

[24] Glockner Ingo, *op. cit.*, p. 5.

[25] Montague Richard, „The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English", *Approaches to Natural Languages*, Hintikka J. et. al. (eds.), Reidel, Dordrecht, 1973, p. 222.

înălțime”, expresia „doi” are două ocurențe care nu pot avea același înțeles datorită rolului sintactic diferit pe care îl joacă. În prima ocurență, „doi” este un cuantificator, pe când în a doua, este componentă a termenului „gard de doi metri înălțime”, indicând poziția gardului pe scala înălțimilor. Pe lângă aceste funcții, numerele pot interveni în analiza schimbărilor și transformărilor dar și a operațiilor asupra acestora. De pildă, când spunem „Cantitatea de zahăr din depozitul *Z* a crescut cu două kilograme”, aceeași expresie, „doi”, indică puterea iterației transformării unitate asupra greutății.

Aceste diferențe se reflectă și în operațiile asupra numerelor. Adunarea poate fi efectuată în cazul compunerii transformărilor sau a aplicării unei transformări la o anumită stare. Bunăoară, dacă „Numărul de f a crescut cu doi de la t_1 la t_2” și „Numărul de f a crescut cu trei de la t_2 la t_3” atunci „Numărul de f a crescut cu cinci de la t_1 la t_3”; aici adunarea intervine când compunem două transformări. În schimb, dacă numerele intervin în propoziții de stare, ele nu pot fi adunate, dar pot fi scăzute, când obținem o propoziție de transformare, ca în exemplul: „X are 80 kg greutate la momentul t_1” și „X are 70 kg greutate la momentul t_2”, prin urmare, „Greutatea lui X a scăzut cu 10 kg de la momentul t_1 la momentul t_2”. De aceea, atunci când efectuăm operații cu numere, în funcție de cum sunt acestea folosite, trebuie să avem în vedere sintaxa logică a expresiilor și legile logicii, altfel, matematica nu are nici un înțeles.