UNIVERS LOGIC GENERATOR. LOGICĂ BIDIMENSIONALĂ

IULIAN GRIGORIU

INTRODUCERE

În cele ce urmează, intenționez să dezvolt ceea ce Wittgenstein numeşte *semn propozițional*. E vorba de *propoziții logice* caracterizate prin *structură*, *tipuri*, *expresii*, *condiții de adevăr*, care vor constitui bazele unui Univers Logic Generator (ULG).

Un ULG este o dezvoltare a Spațiului Logic[1] wittgensteinian conceput ca un SL binar[2] (depinzând de două propoziți elementare *p*, *q*) dotat cu o logică bivalentă – fiecare propoziție poate avea doar una din cele două valori de adevăr posibile: adevăr (simbolic 1) și fals (0). Propoziția elementară este adevărată, dacă starea de lucruri desemnată de ea există, și falsă, dacă starea de lucruri nu există[3].

În acest context, voi obține generalizarea semnului propozițional ca o concretizare a formei generale a propoziției (FGP) pentru un ULG binar bivalent, ca suită de 16 matrici de dimensiune 16x16, având ca elemente propozițiile logice din SL.

Consider că acesta este cadrul cel mai potrivit pentru un reprezentaționism logico-matematic, pe care îl propun ca un spațiu care din punct de vedere logic să reprezinte lumea („Faptele în spațiul logic constituie lumea” – *Tractatus Logico-Philosophicus*[4], 1.13), prin obținerea în mod *a priori* a tuturor relațiilor posibile dintre propoziții, reprezentaționate în matrici guvernate de operatori bidimensionali. Wittgenstein vorbește despre „forma generală a funcției de adevăr” care este și „forma generală a propoziției” (TLP, 6), precum și despre „forma generală a operațiunii” (TLP, 6.01). Expuse ca forme generale, ele sunt niște concepte ce ar trebui să conțină principiile de obținere a cazurilor particulare ce pot prolifera plecând de la bazele unui SL[5]. În abordarea de față, voi propune alte forme generale de exprimare a unui SL, dezvoltat ca UL bidimensional[6] (limitat de de condițiile inițiale).

---

[1] SL în continuare.

[2] În principiu, discuția se poate extinde la un Univers Logic *n*-ar dotat cu o logică *m*-valentă.

[3] Deocamdată, voi considera că negația funcționează automat, cu toate consecințele ce decurg: negația adevărului conduce la fals și negația falsului conduce la adevăr.

[4] TLP în continuare.

[5] Aceste forme am arătat că nu au semnificație în „Filosofia matematicii și eșecul logicist în *Tractatus Logico-Philosophicus*”, în „Probleme de Logică”, vol. XXI, Editura Academiei Române, 2018, pp. 67–95.

[6] UL_2 în continuare. Pentru a sugera că e vorba de o generare-generalizare, îl mai exprim sub forma ULG_2.

Propozițiile elementare (componente de bază ale SL) constituie nucleul din care se dezvoltă ULG. Acesta va consta în nişte structuri tabelare conținând aceleaşi 16 propoziții ale SL, în diferite aranjamente, care generează o logică bidimensională, cu axiome, reguli, proprietăți; e vorba aşadar de nişte „felii" de structuri logice care pot angrena în continuare într-un UL multi-dimensional. Ideea de bază a generalizării propuse este aceea că propozițiile elementare generează o rețea *a priori* de relații care se dezvoltă pe baza structurilor lor interne de adevăr. Finalitatea studiului rezidă în reprezentaționarea tuturor variantelor posibile de relații dintre funcțiile logice, dar mai ales în relevarea unei ordini interne operaționale ce deschide perspective logiciste inclusiv în vederea definirii numărului natural.

CONSIDERAȚII TEORETICE

Dacă în TLP realitatea logică rezidă în SL (desemnat de tabelul lui Wittgenstein), în cazul de față, SL generat de două propoziții elementare constituie punctul de plecare al obținerii unui Univers Logic. Am adăugat expresiei Univers Logic atributul de „Generator" pentru a evidenția faptul că structurile propoziționale elementare generează întreg posibilul logic, în mod necesar. E de ajuns de a realiza și epuiza toate combinațiile și toate combinațiile de combinații posibile între structurile propoziționale, ca funcții de adevăr ale propozițiilor elementare.

Între propozițiile SL există aşa-zise „relații interne" sau „relații formale" ale structurilor, cum le numeşte Wittgenstein în repetate rânduri. Relațiile interne apar ca urmare a acțiunii unei operațiuni asupra tuturor combinațiilor posibile dintre valorile de adevăr ale propozițiilor atomare, fiecare propoziție din SL poate fi privită ca un astfel de rezultat.

Din tot ce susține Wittgenstein în TLP, SL, chiar dacă alcătuit din aceleaşi 16 propoziții sau funcții de adevăr, nu se rezumă la tabelul respectiv, el trebuind să fie o structură cadru care să preexiste oricărei situații logice şi în care să se înscrie orice stare de lucruri a lumii.

Există mai multe variante de dezvoltare-generalizare a semnului propozițional, chiar și în spiritul a ceea ce voi propune în studiul prezent. Numărul infinit de propoziții ale logicii şi matematicii (TLP 5.43) rezultă din aplicarea unor aceloraşi legi (sau unei aceleiaşi legi) unor propoziții date (cale pe care o propune Wittgenstein și am arătat[7] că nu funcționează, deoarece formele rezultate nu au semnificație). Într-un SL finit, de dimensiune *n*, nu se poate depista modul de acțiune al unei operațiuni generale de tipul *N*(*p*, *q*,...)[8] care să producă, în mod liniar, toate propozițiile din acel spațiu. În alte condiții dacă se consideră că se pleacă de la o bază finitąde *n* propoziții elementare date și se aplică operatorul *N* care produce conjuncția negatelor celor *n* propoziții, deci o nouă propoziție, p_{n+1} și aceasta se adaugă bazelor inițiale, cărora li se aplică iarăși operatorul *N*, atunci

[7] A se vedea nota 5.
[8] Pe care am denumit-o *negație multiplicativă*, în spiritul TLP.

faptul că se obține o nouă propoziție dintr-un SL_{n+1}, e adevărat, dar superfluu. Numărul propozițiilor de bază crește cu câte o unitate, deci numărul condițiilor de adevăr se dublează, iar numărul propozițiilor din SL se multiplică prin ridicare la pătrat (de la 2^{2^n} la $2^{2^{n+1}}$ – în SL_2 sunt 16 propoziții, în SL_3, 256).

Această proliferare a numărului de propoziții, numai pentru a se produce o alta, care se adaugă propozițiilor de bază și produc iarăși o propoziție de un ordin superior, lasă fără niciun rol celelalte propoziții din SL respectiv și consider că nu reprezintă o generalizare a semnului propozițional.

Pe de altă parte, dezvoltarea semnului propozițional în maniera pe care o propun e în spiritul filosofiei logicii din TLP. De altfel, înainte de a da forma generală a funcției de adevăr (a propoziției) $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ (6) și a operațiunii $(\Omega'(\bar{\eta}) = [\bar{\xi}, N(\bar{\xi})]'(\bar{\eta}) = [\bar{\eta}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})])$ (6.01), în care Wittgenstein alege ca formă cea mai generală de trecere de la o propopoziție la alta, operatorul logic N (al negației multiplicative), filosoful austriac lasă deschis celălalt mod de a generaliza semnul propozițional, pe care îl propun aici, pe baza structurilor interne ale propozițiilor. Această posibilitate e deschisă de propozițiile 5.3, 5.31, 5.32 care permit dezvoltarea SL prin compunerea funcțiilor (propozițiilor logice) după legea fiecăreia din cele 16 operațiuni. De asemenea, propozițiile tractariene, 5.46, 5.461 discută și anticipează cumva tocmai generalizarea semnului propozițional în spiritul pe care îl propun aici, prin căutarea „formei cele mai generale a combinațiilor lor"; ceea ce rezultă, se generează din „esența propoziției" 5.471, 5.4711, „unica constantă logică", ceea ce au în comun toate propozițiile logicii prin natura lor (idem), dar nu este decât vizat la modul general și nu se realizează în TLP.

COORDONATE LOGICE DE NIVELE DIFERITE

Direcția de dezvoltare a ULG ține de următoarea structură de coordonate pe paliere diferite:

1) Coordonate logice elementare	2) Coordonate de valori de adevăr ale propozițiilor elementare ale SL	3) Coordonate ale ULG	Operatori tabelari
1 (adevăr) 0 (fals)	p_0^1 (*prima* propoziție elementară) q_0^1 (*a doua* propoziție elementară)	$p_1(p,q)$, $p_2(p,q)$, .., $p_{16}(p,q)$ ca rezultate ale aplicării operațiunilor o_1, o_2, .., o_{16} asupra propozițiilor elementare	$O_1(p_1, ...p_{16})$,...,$O_{16}(p_1, ..., p_{16})$ ca rezultate matriceale ale dispunerii tuturor combinațiilor de coordonate precedente

Coordonatele se integrează reciproc, nivelele inferioare devin componente ale coordonatelor superioare, iar cele superioare pot intra iarăși în rolul unor baze de generare. Se trece de la coordonate la coordonate de coordonate etc. Această situație conduce la un tip de recursivitate, la posibilitatea de a privi sau a reduce sisteme de ordin superior la cele inferioare, la capacitatea de organizare matematică pe diferite straturi a coordonatelor logice, la căpătarea de noi semnificații pentru semnul opozițional astfel dezvoltat sau generat pe nivele ontologice diferite[9]. Într-o

[9] Asemănător se întâmplă în Fizică, când se trece de la coordonate elementare de spațiu și timp la coordonate de coordonate în Spațiul Fazelor: s, t →*p* = *mv* (mișcare), *x* (poziție). Fizica

asemenea manieră se poate „înainta într-un șir de forme”, până la epuizarea structurilor UL respectiv. Legăturile și imbricarea propozițiilor logice la diferite nivele denotă capacitatea lor de transmutație (integrarea expresiilor și a echivalențelor posibile), precum și o realitate logică intensională ca unitate *a priori* cu sens ce reprezintă, spune ceva despre lume.

REPREZENTAREA COMPUNERII PROPOZIȚIILOR LOGICE CONFORM LEGII UNEI OPERAȚIUNI DUPĂ STRUCTURILE INTERNE

A stabili ca punct de plecare „două” propoziții atomare reprezintă o situație generală, nu particulară, și în același timp stabilește o ordine între p, q, un sens de la p la q și invers. Că sunt „două” propoziții nu denotă o lipsă a generalității, ci un nucleu de plecare. Valorile de adevăr ale uneia pot relaționa cu valorile de adevăr ale celeilalte ca structuri interne pentru a se realiza toate combinațiile posibile. Și că dacă ar fi mai multe propoziții inițiale, acțiunea lor s-ar compune secvențial: acțiunea a două dintre ele s-ar compune cu acțiunea celei de-a treia ș.a.m.d.

Voi dezvolta în continuare un univers logic pe baza a două propoziții elementare, p și q, într-o logică binară[10]. Fie două funcții propoziționale, p_0^1 și q_0^1. Structura de adevăr a unei propoziții elementare este (0, 1); există un singur „adevăr” și un singur „fals”. Dacă pentru început personalizez adevărul și falsul unei propoziții, o fac doar pentru a sugera modul în care cele 16 funcții propoziționale din tabelul lui Wittgenstein pot deveni la rândul lor baze „elementare” de generare a altor structuri logice și pentru a sublinia că posibilitatea lor de a angrena se bazează tot pe combinațiile de adevăr (pe structurile interne) ale propozițiilor elementare.

Fie p, q și cele 4 posibilități de adevăr ale lor:

p	0	1
q		
0	(0p, 0q)	(1p, 0q)
1	(1p, 0q)	(1p, 1q)

Mai comodă este reprezentaționarea

p	q	o_k(p, q) = p_k
0	0	...
0	1	...
1	0	...
1	1	...

pentru a arăta că o_k(operațiunea k) aplicată perechii elementare p, q, generează p_k: $o_k(p,q) = p_k$, $k = \overline{1,16}$. Acesta este SL wittgensteinian:

lucrează cu transformări de coordonate, cu echivalențe din ce în ce mai expresive, pentru rafinarea unui anumit palier ontologic.

10 Aceeași discuție e valabilă într-un univers logic generat de *n* propoziții elementare, care generează 2^{2^n} funcții și respectiv operațiuni sau legi logice.

p	q	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Pentru a obține un ULG, trec la ultimul nivel, al operatorilor tabelari, în care rezultatele nivelului anterior $p_k(p,q)$ devin coordonate de plecare. Se vor obține 16 entități tabelare, fiecare conținând 16x16 propoziții. Forma generală a acestor tabele este:

$O_i(p_k, p_j) = p_k o_i p_j = o_i(o_k(p,q), o_j(p,q))$.[11]$(i, j, k \in \overline{1,16})$.

De exemplu, pt. i = 1, O_i este O_1, cu tabelul corespunzător compunerii tuturor perechilor de propoziții din SL după legea lui o_1(contradicția din SL).

Pentru i = 2, O_i este O_2, cu tabelul corespunzător compunerii tuturor perechilor de propoziții din SL după operațiunea o_2:

$O_2(p_k, p_j) = O_2(o_k(p,q), o_j(p,q))$ ceea ce are ca rezultat 256 de propoziții dispuse matriceal.

Fac observația că în continuare voi face abstracție de semnificația operațiunilor din SL, urmând să stabilesc semnificațiile logice ale tabelelor obținute nu pe bază de calcul operațional, ci numai în urma combinațiilor structurilor interne propoziționale.

Exemplu: Fie $O_k = O_2$. În căsuțele tabelului de 16x16 este trecut rezultatul:

(O_2)	p1	p2	pj	p16
p1	O_2(p1, p1)	O_2(p1, p2)	O_2(p1, pj)	O_2(p1, p16)
p2	O_2(p2, p1)	O_2(p2, p2)	O_2(p2, pj)	O_2(p2, p16)
pk	O_2(pk, p1) ………	O_2(pk, p2) ………	O_2(pk, pj) ………	O_2(pk, p16) ………
p16	O_2(p16, p1)	O_2(p16, p2)	O_2(p16, pj)	O_2(p16, p1)

Pentru a compune cele 16 perechi de propoziții după legea unei anumite operațiuni, voi detalia ce se petrece la nivelul structurilor interne propoziționale pe un caz concret: consider două propoziții, de pildă p_4 și p_5, pe care le compun după legea sau operațiunea o_2: pe scurt, $p_4(o_2)p_5$ sau $o_2(p_4, p_5)$.

Wittgenstein se referă la *bazele unei operațiuni* precum la argumentul unei funcții (5.21). Astfel, el afirmă că „structurile propozițiilor stau unele cu altele în relații interne” (5.2), (socotite de unii relații formale), iar aceste relații interne sunt puse în evidență prin felul în care o operațiune aplicată uneia sau mai multor propoziții produce o altă propoziție.

Reprezentaționez pe 0_p, 0_q, 1_p, 1_q, 0_4, 1_4 etc. doar pentru a detalia structurile; dar nu există valori de adevăr de tipuri diferite: se adoptă un singur fals şi un singur adevăr, 0 şi 1.

[11] Asemănător se pot compune și câte 3 propoziții (elementare sau neelementare): $O_s(p_k, p_r, p_t) = ((p_k o_c p_r) o_m p_t) = O_m(p_s, p_t)$, unde $p_s = p_k o_c p_r$. Această trecere se poate face când propozițiile au aceleași dimensiuni, deci în același univers logic.

p	q	o_4(p, q) = p4
0_p	0_q	$o_4(0_p, 0_q) = 0_4$
0_p	1_q	$o_4(0_p, 1_q) = 0_4$
1_p	0_q	$o_4(1_p, 0_q) = 1_4$
1_p	1_q	$o_4(1_p, 1_q) = 1_4$

p	q	o_5(p, q) = p5
0_p	0_q	$o_5(0_p, 0_q) = 0_5$
0_p	1_q	$o_5(0_p, 1_q) = 1_5$
1_p	0_q	$o_5(1_p, 0_q) = 0_5$
1_p	1_q	$o_5(1_p, 1_q) = 0_5$

p	q	o_2(p, q) = p_2
0_p	0_q	0
0_p	1_q	0
1_p	0_q	0
1_p	1_q	1

Detaliez pas cu pas dezvoltarea: când compun *şirurile formale* ale celor două propoziţii, de fapt compun *bazele de adevăr* ale celor două propoziţii; cum în fiecare tabel există cele două coloane alocate lui p şi q care reprezentaționează toate combinațiile de adevăr ale propozițiilor elementare, acestea sunt cele care trebuie să „fuzioneze”, după legea sau operațiunea aleasă, în cazul de față, o_2. Cu alte cuvinte, se compun bazele operațiunii (cu toate combinațile aferente) corespunzătoare lui o_2 după fiecare din cele două propoziții în parte; se compun[12] așadar:

$o_4(0_p.0_q)$ cu $o_5(0_p.0_q)$, deci 0_4 cu 0_5

$o_4(0_p.1_q)$ cu $o_5(0_p.1_q)$, deci 0_4 cu 1_5

$o_4(1_p.0_q)$ cu $o_5(1_p.0_q)$, deci 1_4 cu 0_5

$o_4(1_p.1_q)$ cu $o_5(1_p.1_q)$, deci 1_4 cu 1_5, fiecare după legea lui o_2: va rezulta astfel, o altă propoziție, fiindcă ea este un rezultat al unei *operațiuni* aplicat *bazelor operațiunii* (propozițiilor elementare); în cazul exemplificat, cf. legii o_2, rezultatul va fi: 0, 0, 0, 0, așadar contradicția din SL, notată p_1.Trec exemplul de mai sus într-un tabel:

p4	p5	o_2 (p4, p5)
0	1	0
0	1	0
1	0	0
1	0	0

Conform ultimei coloane, se observă că rezultatul compunerii lui p_4 şi p_5 după legea o_2 este p_1: $p_4 o_2 p_5 = p_1$ sau altfel scris, $o_2(p_4, p_5) = p_1$.

În acest spirit, se observă că operațiunea „exprimă diferența dintre forme” (5.24), aceasta „nu desemnează nici o formă” (5.241).

[12] Discut de modul de operare a funcționalului operațional *O*(*f*) = *Of*; adică, *O* aplicat şirului formal al funcției propoziționale p_4= *O*(0,0,1,1) = *O*(p_4(0,0), p_4(0,1), p_4(1,0), p_4(1,1)).

Desigur că operațiunile aplicate repetat, până când epuizează toate combinațiile de propoziții, alcătuiesc matricea operatorului respectiv (notat cu *O*).

În cazul general, $O_k(p_i, p_j)$ (= p_s), (I) este o primă expresie a formei generale a propoziției (FGP); k, i, j, s sunt indici care marchează și identifică cele 2^{2^n}propoziții generate de *n* propoziții elementare. Ea afirmă: un operator matriceal (*O*) este rezultatul acțiunii operațiunii respective (*o*) asupra tuturor perechilor de propoziții p_i, p_j, k, j = $\overline{1,16}$, și are ca rezultat 256 de propoziții (nu neapărat diferite) dispuse matriceal, aparținând aceluiași SL de la care s-a plecat. (Numărul de propoziții elementare care alcătuiesc baza dau dimensiunea spațiului logic respectiv.)

Folosind scrierea lui Wittgenstein, care simbolizează cu o bară deasupra o „totalitate”, o a doua expresie a FGP ar fi:

$\bar{o}(\bar{p}) = (p)$, (II),

unde ceea ce se dă, ceea ce se știe, nu ține neapărat un *număr* de propoziții, ci de un UL acoperit în totalitate de combinații propoziționale. Expresia s-ar traduce astfel: o totalitate de operațiuni aplicată unei totalități de propoziții conduce la o serie de propoziții dispuse într-o structură matriceală[13]. Această formă de aplicare a operațiunilor se poate reprezentaționa mai sugestiv în spirit tractarian: $o_{o_{o_{\cdots o}}}$(ξ......) (cf. 5.501); cu ordinul operațiunilor trecut ca indice (sau ca putere, același lucru) se poate trece la definirea numerelor naturale în același stil ca la 6.02. Ca rezultat al înaintării într-un șir formal obținând de data aceasta structuri matriceale (diferite) și nu propoziții logice (am arătat că operațiunea acționând secvențial, la un moment dat nu mai produce rezultate, șirul se blochează, nu mai are semificație; pe când în cazul unui ULG, $o_{o_{o_{\cdots o}}}$(ξ......) are semnificație de obiect distinct. Despre ce structuri este de fapt vorba?

Pentru a concretiza efectiv FGP și ULG pentru *n* propoziții elementare, ca să gestionez mai ușor aceste „felii” de Univers Logic, voi trece rezultatele în cele 2^{2^n} tabele. În fiecare tabel vor fi $(2^{2^n})^2$ compuneri de propoziții (după legea respectivă), deci în total $2^{2^n}(2^{2^n})^2$ = $(2^{2^n})^3$ rezultate sub formă de hipermatrici de propoziții.

În studiul prezent obțin aceste structuri propoziționale pentru 2 propoziții elementare și cele 16 funcții logice (operațiuni) și 16 posibilități de propoziții generate: e deci vorba de 16 tabele cu 16x256 = 4096 rezultate *a priori* (obținute înainte de orice calcul logic și pe baza cărora voi defini operatorii logici tabelari respectivi, care vor păstra semnificația operațiunilor din SL wittgensteinian, dezvoltând totodată acest spațiu). A se vedea **Anexa Univers Logic Generator.**

---

[13] Forma generală a propoziției (FGP) (Die allgemeine Form des Satzes – The general form of a proposition), scrie Wittgenstein (TLP 4.5), poate fi dată doar în esențialitatea ei, altfel nu ar mai fi generală (FGP fiind o variabilă, cf. 4.53) ea afirmă (Es verhält sich so und so) (că lucrurile se comportă așa și așa), sau, cum traduce M. Black – *A Companion to Wittgenstein's Tractatus*, University Press, Cambridge, 1964, p. 236, „FGP constă în capacitatea de a exprima cum se comportă lucrurile” (cf. TLP 1991, trad. Al. Surdu, nota 117, p. 138).

ANEXA UNIVERS LOGIC GENERATOR (ULG_2)[14]

(Sub operatorul tabelar O_k am notat operațiunea respectivă o_k, cea care a generat propozițiile tabelului)

(O1) contrd.	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p2	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p3	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p4	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p5	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p6	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p7	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p8	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p9	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p10	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p11	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p12	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p13	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p14	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p15	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p16	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1

(O2) $\wedge$	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2
p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3
p4	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4
p5	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5
p6	p1	p2	p1	p2	p5	p6	p5	p6	p1	p2	p1	p2	p5	p6	p5	p6
p7	p1	p1	p3	p3	p5	p5	p7	p7	p1	p1	p3	p3	p5	p5	p7	p7
p8	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
p9	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9
p10	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p9	p10	p9	p10	p9	p10	p9	p10
p11	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p9	p9	p11	p11	p9	p9	p11	p11
p12	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4	p9	p10	p11	p12	p9	p10	p11	p12
p13	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5	p9	p9	p9	p9	p13	p13	p13	p13
p14	p1	p2	p1	p2	p5	p5	p5	p5	p9	p10	p9	p10	p13	p14	p13	p14
p15	p1	p1	p3	p3	p5	p5	p7	p7	p9	p9	p11	p11	p13	p13	p15	p15
p16	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16

[14] Aceste tabele au fost publicate pentru prima dată de autor în romanul logico-filosofic, *Cu Wittgenstein la mănăstire*, Ed. Paideia 2003, pp. 135–139.

(O3) $\overline{\rightarrow}$	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p2	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1
p3	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1
p4	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1
p5	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1
p6	p6	p5	p6	p5	p2	p1	p2	p1	p6	p5	p6	p5	p2	p1	p2	p1
p7	p7	p7	p5	p5	p3	p3	p1	p1	p7	p7	p5	p5	p3	p3	p1	p1
p8	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p10	p10	p9	p10	p9	p10	p9	p10	p9	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1
p11	p11	p11	p9	p9	p11	p11	p9	p9	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1
p12	p12	p11	p10	p9	p12	p11	p10	p9	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1
p13	p13	p13	p13	p13	p9	p9	p9	p9	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1
p14	p14	p13	p14	p13	p10	p9	p10	p9	p6	p5	p6	p5	p2	p1	p2	p1
p15	p15	p15	p13	p13	p11	p11	p9	p9	p7	p7	p5	p5	p3	p3	p1	p1
p16	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1

(O4) p	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2
p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3
p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4
p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5
p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6
p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7
p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8
p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9
p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10
p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11
p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12
p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13
p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14
p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15
p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16

(O5) $\overline{\leftarrow}$	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p2	p1	p1	p3	p3	p5	p5	p7	p7	p9	p9	p11	p11	p13	p13	p15	p15
p3	p1	p2	p1	p2	p5	p6	p5	p6	p9	p10	p9	p10	p13	p14	p13	p14
p4	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5	p9	p9	p9	p9	p13	p13	p13	p13
p5	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4	p9	p10	p11	p12	p9	p10	p11	p12
p6	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p9	p9	p11	p11	p9	p9	p11	p11
p7	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p9	p10	p9	p10	p9	p10	p9	p10
p8	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9
p9	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
p10	p1	p1	p3	p3	p5	p5	p7	p7	p1	p1	p3	p3	p5	p5	p7	p7
p11	p1	p2	p1	p2	p5	p6	p5	p6	p1	p2	p1	p2	p5	p6	p5	p6
p12	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5
p13	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4	p1	p2	p3	p4
p14	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3
p15	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2
p16	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1

(O6) q	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p2	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p3	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p4	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p5	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p6	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p7	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p8	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p9	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p10	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p11	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p12	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p13	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p14	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p15	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p16	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16

(O7) w	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p2	p2	p1	p4	p3	p6	p5	p8	p7	p10	p9	p12	p11	p14	p13	p16	p15
p3	p3	p4	p1	p2	p7	p8	p5	p6	p11	p12	p9	p10	p15	p16	p13	p14
p4	p4	p3	p2	p1	p8	p7	p6	p5	p12	p11	p10	p9	p16	p15	p14	p13
p5	p5	p6	p7	p8	p1	p2	p3	p4	p13	p14	p15	p16	p9	p10	p11	p12
p6	p6	p5	p8	p7	p2	p1	p4	p3	p14	p13	p16	p15	p10	p9	p12	p11
p7	p7	p8	p5	p6	p3	p4	p1	p2	p15	p16	p13	p14	p11	p12	p9	p10
p8	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9
p9	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
p10	p10	p9	p12	p11	p14	p13	p16	p15	p2	p1	p4	p3	p6	p5	p8	p7
p11	p11	p12	p9	p10	p15	p16	p13	p14	p3	p4	p1	p2	p7	p8	p5	p6
p12	p12	p11	p10	p9	p16	p15	p14	p13	p4	p3	p2	p1	p8	p7	p6	p5
p13	p13	p14	p15	p16	p9	p10	p11	p12	p5	p6	p7	p8	p1	p2	p3	p4
p14	p14	p13	p16	p15	p10	p9	p12	p11	p6	p5	p8	p7	p2	p1	p4	p3
p15	p15	p16	p13	p14	p11	p12	p9	p10	p7	p8	p5	p6	p3	p4	p1	p2
p16	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1

(O8) v	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p2	p2	p2	p4	p4	p6	p6	p8	p8	p10	p10	p12	p12	p14	p14	p16	p16
p3	p3	p4	p3	p4	p7	p8	p7	p8	p11	p12	p11	p12	p15	p16	p15	p16
p4	p4	p4	p4	p4	p8	p8	p8	p8	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16
p5	p5	p6	p7	p8	p5	p6	p7	p8	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16
p6	p6	p6	p8	p8	p6	p6	p8	p8	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16
p7	p7	p8	p7	p8	p7	p8	p7	p8	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16
p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p9	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p10	p10	p10	p12	p12	p14	p14	p16	p16	p10	p10	p12	p12	p14	p14	p16	p16
p11	p11	p12	p11	p12	p15	p16	p15	p16	p11	p12	p11	p12	p15	p16	p15	p16
p12	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16
p13	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16
p14	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16
p15	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16
p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16

(O9) /	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p2	p15	p15	p13	p13	p11	p11	p9	p9	p7	p7	p5	p5	p3	p3	p1	p1
p3	p14	p13	p14	p13	p10	p9	p10	p9	p6	p5	p6	p5	p2	p1	p2	p1
p4	p13	p13	p13	p13	p9	p9	p9	p9	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1
p5	p12	p11	p10	p9	p12	p11	p10	p9	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1
p6	p11	p11	p9	p9	p11	p11	p9	p9	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1
p7	p10	p9	p10	p9	p10	p9	p10	p9	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1
p8	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1
p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p10	p7	p7	p5	p5	p3	p3	p1	p1	p7	p7	p5	p5	p3	p3	p1	p1
p11	p6	p5	p6	p5	p2	p1	p2	p1	p6	p5	p6	p5	p2	p1	p2	p1
p12	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1	p5	p5	p5	p5	p1	p1	p1	p1
p13	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1	p4	p3	p2	p1
p14	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1	p3	p3	p1	p1
p15	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1	p2	p1
p16	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1

(O10) ↔	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p2	p15	p16	p13	p14	p11	p12	p9	p10	p7	p8	p5	p6	p3	p4	p1	p2
p3	p14	p13	p16	p15	p10	p9	p12	p11	p6	p5	p8	p7	p2	p1	p4	p3
p4	p13	p14	p15	p16	p9	p10	p11	p12	p5	p6	p7	p8	p1	p2	p3	p4
p5	p12	p11	p10	p9	p16	p15	p14	p13	p4	p3	p2	p1	p8	p7	p6	p5
p6	p11	p12	p9	p10	p15	p16	p13	p14	p3	p4	p1	p2	p7	p8	p5	p6
p7	p10	p9	p12	p11	p14	p13	p16	p15	p2	p1	p4	p3	p6	p5	p8	p7
p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9
p10	p7	p8	p5	p6	p3	p4	p1	p2	p15	p16	p13	p14	p11	p12	p9	p10
p11	p6	p5	p8	p7	p2	p1	p4	p3	p14	p13	p16	p15	p10	p9	p12	p11
p12	p5	p6	p7	p8	p1	p2	p3	p4	p13	p14	p15	p16	p9	p10	p11	p12
p13	p4	p3	p2	p1	p8	p7	p6	p5	p12	p11	p10	p9	p16	p15	p14	p13
p14	p3	p4	p1	p2	p7	p8	p5	p6	p11	p12	p9	p10	p15	p16	p13	p14
p15	p2	p1	p4	p3	p6	p5	p8	p7	p10	p9	p12	p11	p14	p13	p16	p15
p16	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16

(O11) $\bar{q}$	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p2	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p3	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p4	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p5	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p6	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p7	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p8	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p9	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p10	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p11	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p12	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p13	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p14	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p15	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p16	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1

(O12) ←	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1
p2	p16	p16	p14	p14	p12	p12	p10	p10	p8	p8	p6	p6	p4	p4	p2	p2
p3	p16	p15	p16	p15	p12	p11	p12	p11	p8	p7	p8	p7	p4	p3	p4	p3
p4	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12	p8	p8	p8	p8	p4	p4	p4	p4
p5	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13	p8	p7	p6	p5	p8	p7	p6	p5
p6	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p8	p8	p6	p6	p8	p8	p6	p6
p7	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p8	p7	p8	p7	p8	p7	p8	p7
p8	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8
p9	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9
p10	p16	p16	p14	p14	p12	p12	p10	p10	p16	p16	p14	p14	p12	p12	p10	p10
p11	p16	p15	p16	p15	p12	p11	p12	p11	p16	p15	p16	p15	p12	p11	p12	p11
p12	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12
p13	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13
p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14
p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15
p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16

(O13) $\bar{p}$	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p2	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15	p15
p3	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14	p14
p4	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13	p13
p5	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12	p12
p6	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11	p11
p7	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10	p10
p8	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9	p9
p9	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8
p10	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7	p7
p11	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6	p6
p12	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5	p5
p13	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4	p4
p14	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3	p3
p15	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2	p2
p16	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1	p1

(O14) →	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p2	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16
p3	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16
p4	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16
p5	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16
p6	p11	p12	p11	p12	p15	p16	p15	p16	p11	p12	p11	p12	p15	p16	p15	p16
p7	p10	p10	p12	p12	p14	p14	p16	p16	p10	p10	p12	p12	p14	p14	p16	p16
p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p9	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p10	p7	p8	p7	p8	p7	p8	p7	p8	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16
p11	p6	p6	p8	p8	p6	p6	p8	p8	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16
p12	p5	p6	p7	p8	p5	p6	p7	p8	p13	p14	p15	p16	p13	p14	p15	p16
p13	p4	p4	p4	p4	p8	p8	p8	p8	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16
p14	p3	p4	p3	p4	p7	p8	p7	p8	p11	p12	p11	p12	p15	p16	p15	p16
p15	p2	p2	p4	p4	p6	p6	p8	p8	p10	p10	p12	p12	p14	p14	p16	p16
p16	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16

(O15) ↓	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p2	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15
p3	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14
p4	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13
p5	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12
p6	p16	p15	p16	p15	p12	p11	p12	p11	p16	p15	p16	p15	p12	p11	p12	p11
p7	p16	p16	p14	p14	p12	p12	p10	p10	p16	p16	p14	p14	p12	p12	p10	p10
p8	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9
p9	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8	p8
p10	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p16	p15	p8	p7	p8	p7	p8	p7	p8	p7
p11	p16	p16	p14	p14	p16	p16	p14	p14	p8	p8	p6	p6	p8	p8	p6	p6
p12	p16	p15	p14	p13	p16	p15	p14	p13	p8	p7	p6	p5	p8	p7	p6	p5
p13	p16	p16	p16	p16	p12	p12	p12	p12	p8	p8	p8	p8	p4	p4	p4	p4
p14	p16	p15	p16	p15	p12	p11	p12	p11	p8	p7	p8	p7	p4	p3	p4	p3
p15	p16	p16	p14	p14	p12	p12	p10	p10	p8	p8	p6	p6	p4	p4	p2	p2
p16	p16	p15	p14	p13	p12	p11	p10	p9	p8	p7	p6	p5	p4	p3	p2	p1

(O16) tautologie	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
p1	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p2	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p3	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p4	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p5	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p6	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p7	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p8	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p9	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p10	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p11	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p12	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p13	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p14	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p15	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16
p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16	p16

Aceste tabele au fost obținute pe baza compunerii structurilor interne ale propozițiilor (rezultate ale acțiunii operațiunilor asupra bazelor) fără a conferi semnificație operațiunilor și fără a stabili moduri de calcul, identificând propozițiile după structurile lor interne din SL. Fiecare tabel va putea fi citit ca o reprezentaționare a relațiilor de validitate dintre propoziții. Un tabel conține 16x16 = 256 de astfel de relații valide.

Operatorii tabelari pot trece unii într-alții prin compunerea lor $O_k(O_j)/i$, rezultatul fiind un operator tabelar depinzând de toate combinațiile propoziționale p_s, p_t ca argumente, unde structurile interne j și k se compun după regulile interne ale lui i: dintre toate combinațiile posibile se pot reține doar cele fundamentale, în număr de 16 x 256 = 4096, rezultate ce pot fi extrase din Anexa de mai sus, ținând cont că p_k = $o_k(p_k)$, deci ca permutări ale unor rezultate deja obținute și pe care nu le mai consemnez aici în mod expres[15].

[15] În articolul menționat, am arătat că prin compunerea repetată a unui operator prin el însuși, șirul se bochează, deci nu poate fi vorba de o generalizare în acest sens.

INSTITUIREA ORDINII. AXIOMELE TAUTOLOGIEI ȘI CONTRADICȚIEI ȘI ALE CELORLALȚI OPERATORI TABELARI. SENS ȘI SIMETRIE

Ceea ce preia ULG_2 astfel obținut de la SL_2 , sunt cele 16 funcții propoziționale, care se așază în tabelele de mai sus, conform acțiunii operatorilor tabelari purtând același indice, O_1, O_2,..., O_{16}. De asemenea se cunosc structurile interne ale celor 16 propoziții, de la p_1: $(0,0,0,0)^t$ la p_{16}: $(1,1,1,1)^t$, faptul că există o simetrie între propoziții, adică $\bar{p}_k = p_{17-k}$ se reflectă asupra tabelelor: O_k = $N(O_{17-k})$ (N dezvoltă sau generalizează acțiunea negației la nivelul structurilor matriceale operaționale; dacă O_k e format din 256 propoziții p_k, $N(O_{17-k})$ e format din negațiile lor, p_{17-k}, păstrând aceeași structură.

ORDINE ȘI SENS

Studiind ULG_2 din Anexa de mai sus, se poate desprinde o logică bidimensională cu axiomele generatoare respective pentru fiecare operator tabelar. Câteva tabele operaționale ies imediat în evidență prin claritatea și monotonia acțiunii lor asupra perechilor de propoziții:

$\forall p_k, p_j$, $O_4(p_k, p_j) = p_k$; (afirmație de p_k); $O_6(p_k, p_j) = p_j$; (afirmație de p_j); aceste operațiuni aleg prima, respectiv a doua propoziție din perechea (p_k, p_j). Ele instituie astfel o *ordine* între două propoziții oarecare, afirmând-o pe una dintre ele și suprimând-o pe cealaltă.

Operatorii simetrici (prin negație) corespunzători, O_{13}, respectiv O_{11}, neagă propozițiile din tabelele O_4, O_6: $N(O_4(p_k, p_j)) = O_{13}(p_k, p_j) = \bar{p}_k$; $N(O_6(p_k, p_j)) =$ $= O_{11}(p_k, p_j) = \bar{p}_j$.

AXIOMELE CONTRADICȚIEI ȘI TAUTOLOGIEI

Există doi operatori tabelari fundamentali, notați convențional O_1 și O_{16} perfect simetrici, similari, de semnificații opuse, independenți de p_k, p_j: $\forall p_k$, p_j, $O_1(p_k, p_j) = p_1$ (256 rezultate p_1, așezate matriceal),
$O_{16}(p_k, p_j) = p_{16}$ (cu câte 256 rezultate așezate matriceal), unde $O_1 = N(O_{16})$.
Din $O_1(p_k, p_j) = p_1$, $\forall k, j$, urmează că $O_1(p_k, p_k) = O_1(p_k, \bar{p}_k) = O_1(\bar{p}_k, p_k) =$ $= O_1(\bar{p}_k, \bar{p}_k) = p_1$;
din $O_{16}(p_k, p_j) = p_{16}$, $\forall k, j$, $O_{16}(p_k, p_k) = O_{16}(p_k, \bar{p}_k) = O_{16}(\bar{p}_k, p_k) =$ $= O_{16}(\bar{p}_k, \bar{p}_k) = p_{16}$.

Astfel, în cadrul logicii binare, toate combinațiile de valori de adevăr la nivel de structuri interne sunt acoperite, ceea ce e suficient pentru definirea operatorilor tabelari T (al tautologiei, O_{16}) și C (operatorul contradicției, O_1).

Semnificația operatorilor tabelari O_1 și O_{16}, constituiți din p_1: $(0,0,0,0)^t$– contradicția din SL, respectiv p_{16}: $(1,1,1,1)^t$ – tautologia din SL, arată că operatorii respectivi anulează structurile interne ale propozițiilor componente, reducându-le la p_1 și respectiv p_{16}. Toate combinațiile de perechi de propoziții devin *una* sub autoritatea celor doi operatori. Opoziția lor radicală se reflectă în ridicarea tensiunii dintre Adevăr și Fals la nivel existențial operațional. *Sensul intrinsec al tautologiei este identitatea între propoziții identice și neidentice, respectiv sensul contradicției este opoziția între identici și neidentici.*

REGULILE DIAGONALELOR

Regulile diagonalelor, pe care le voi da în continuare, vor fi demonstrate *a priori*, pe baza structurilor interne propoziționale, și constituie condiții necesare și suficiente pentru reconstrucția fiecărui operator la nivel de structuri interne. Diagonalele combină structuri de tipul (p_k, p_k) sau $(p_k, \bar{p}_k)$ și au ca valori propoziții de forma p_k sau $\bar{p}_k$.

Regulile arată că dacă punctele de început și de sfârșit ale unei diagonale sunt p_1 (contradicția) sau p_{16} (tautologia), atunci toate punctele diagonale intermediare sunt p_1, respectiv p_6; dacă punctele limită ale unei diagonale sunt p_1 și p_{16}, sau invers, p_{16} și p_1, atunci valorile intermediare sunt p_k, respectiv, $\bar{p}_k$. Aceste reguli vor furniza informații importante despre modul de acțiune și structura fiecărui operator tabelar.

Fie cele două diagonale ale unui operator O_x:

D_1: $O_x(p_k, p_k)$ – diagonala principală și D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ – diagonala secundară;

O diagonală este delimitată de două expresii:

D_1: $O_x(p_1, p_1) = p_A$; $O_x(p_{16}, p_{16}) = p_B$,

D_2: $O_x(p_1, p_{16}) = p_C$; $O_x(p_{16}, p_1) = p_D$, cu $p_A, p_B, p_C, p_D \in \{p_1, p_{16}\}$. Aceasta se întâmplă necesarmente, deoarece combinând aceleași valori de adevăr sau valori opuse, se obțin ca valori limită fie contradicția, fie tautologia. Pot apărea cazurile:

(D^1): Fie punctele limită ale diagonalei D_1: $O_x(p_1, p_1) = p_1$; $O_x(p_{16}, p_{16}) = p_1$ și ale diagonalei D_2: $O_x(p_1, p_{16}) = p_1$, $O_x(p_{16}, p_1) = p_1$; atunci D_1: $O_x(p_k, p_k) = p_1$, respectiv D_2:$O_x(p_k, \bar{p}_k) = p_1$, $\forall k = \overline{1, 16}$;

(D^2): D_1: $O_x(p_1, p_1) = p_{16}$; $O_x(p_{16}, p_{16}) = p_{16}$ și D_2: $O_x(p_1, p_{16}) = p_{16}$, $O_x(p_{16}, p_1) = p_{16}$;

Atunci $O_x(p_k, p_k) = p_{16}$, respectiv $O_x(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$, $\forall k = \overline{1, 16}$;

(D^3): D_1: $O_x(p_1, p_1) = p_1$; $O_x(p_{16}, p_{16}) = p_{16}$ și D_2: $O_x(p_1, p_{16}) = p_1$, $O_x(p_{16}, p_1) =$ $= p_{16}$;

Atunci $O_x(p_k, p_k) = p_k$, respectiv $O_x(p_k, \bar{p}_k) = p_k$, $\forall k = \overline{1, 16}$;

(D^4): D_1: $O_x(p_1, p_1) = p_{16}$; $O_x(p_{16}, p_{16}) = p_1$ și D_2: $O_x(p_1, p_{16}) = p_{16}$, $O_x(p_{16}, p_1) = p_1$;

Atunci $O_x(p_k, p_k) = \bar{p}_k$, respectiv $O_x(p_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k$, $\forall k = \overline{1, 16}$.

Diagonalele unui operator oarecare O_x pot fi în una din situațiile de mai sus, deci

$O_x(D_1^i, D_2^j)$, cu $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Demonstrație

(D^1) Fie diagonala D_1 cu punctele limită $O_x(p_1, p_1)$ = p_1; $O_x(p_{16}, p_{16})$ = p_1; atunci, la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 0)$ = 0; $O_x(1 – 1)$ = 0; deci diagonala D_1: $O_x(p_k, p_k)$ care conține numai perechi de forma (0 – 0); (1 – 1), va avea ca rezultate intermediare numai valoarea de adevăr „0"; desigur că nu apar combinații de tipul (1 – 0) sau (0 – 1); deci D_1: $O_x(p_k, p_k)$ = p_1;

Fie diagonala D_2 cu punctele limită $O_x(p_1, p_{16})$ = p_1, $O_x(p_{16}, p_1)$ = p_1; la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 1)$ = 0; $O_x(1 – 0)$ = 0; diagonala D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ conține numai perechi de forma (0 – 1) = 0 și (1 – 0) = 0, deci va avea ca rezultate intermediare numai valoarea de adevăr „0"; deci D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ = p_1;

(D^2) Fie diagonala D_1 cu punctele limită $O_x(p_1, p_1)$ = p_{16}; $O_x(p_{16}, p_{16})$ = p_{16}; atunci, la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 0)$ = 1; $O_x(1 – 1)$ = 1; diagonala D_1: $O_x(p_k, p_k)$ care conține numai perechi de forma (0 – 0) =1, (1 – 1) =1, va avea ca rezultate intermediare numai valoarea de adevăr „1"; deci D_1: $O_x(p_k, p_k)$ = p_{16}; fie diagonala D_2 cu punctele limită $O_x(p_1, p_{16})$ = p_{16}, $O_x(p_{16}, p_1)$ = p_{16}; la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 1)$ = 1; $O_x(1 – 0)$ = 1; diagonala D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ conține numai perechi de forma (0 – 1) = 1 și (1 – 0) = 1, deci va avea ca rezultate intermediare numai valoarea de adevăr „1"; deci D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ = p_{16};

(D^3) Fie diagonala D_1 cu punctele limită $O_x(p_1, p_1)$ = p_1; $O_x(p_{16}, p_{16})$ = p_{16}; atunci, la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 0)$ = 0; $O_x(1 – 1)$ = 1; diagonala D_1: $O_x(p_k, p_k)$ care combină numai structuri interne de tip (p_k, p_k), indiferent de structura p_k, va avea de combinat numai variantele (0 – 0) = 0, (1 – 1) = 1, din care va rezulta iarăși structura lui p_k. Așadar, D_1: $O_x(p_k, p_k)$ = p_k;

Fie diagonala D_2 cu punctele limită $O_x(p_1, p_{16})$ = p_1, $O_x(p_{16}, p_1)$ = p_{16}; la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 1)$ = 0; $O_x(1 – 0)$ = 1; diagonala D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ combină numai structuri interne de tip $(p_k, \bar{p}_k)$, deci variante de(0 – 1) = 0 și (1 – 0) = 1; aceste structuri vor reproduce ordinea internă din p_k , deci D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ = p_k.

Ex. Să presupunem că structura internă a lui p_k este $(0, 0, 1, 0)^t$: atunci conform variantelor din definiție, de (0 – 1) = 0 și (1 – 0) = 1,

p_k	$\bar{p}_k$	$O_x(p_k, \bar{p}_k)$
0	1	0
0	1	0
1	0	1
0	1	0

deci $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ reproduce p_k;

(D^4) Fie diagonala D_1 cu punctele limită $O_x(p_1, p_1)$ = p_{16}; $O_x(p_{16}, p_{16})$ = p_1; atunci, la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 0)$ = 1; $O_x(1 – 1)$ = 0; diagonala D_1: $O_x(p_k, p_k)$ care combină numai structuri interne de tip (p_k, p_k), indiferent de structura p_k, va avea de combinat numai variantele (0 – 0) = 1, (1 – 1) = 0, din care va rezulta structura lui $\bar{p}_k$. Așadar, D_1: $O_x(p_k, p_k)$ = $\bar{p}_k$;

Fie diagonala D_2 cu punctele limită $O_x(p_1, p_{16})$ = p_{16}, $O_x(p_{16}, p_1)$ = p_1; la nivel de structuri interne, $O_x(0 – 1)$ = 1; $O_x(1 – 0)$ = 0; diagonala D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$

combină numai structuri interne de tip $(p_k, \bar{p}_k)$, deci variante de (0 – 1) = 1 și (1 – 0) = 0; așadar, structura din p_k(0 – 1) devine (1 – 0), așadar aceste structuri vor reproduce ordinea internă din $\bar{p}_k$, deci D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k$.

Teoremă

Regula diagonalelor este condiție necesară și suficientă pentru acțiunea particulară a oricărui operator tabelar[16].

Demonstrație

Suficiența: Prin definiție, diagonalele sunt rezultatul combinărilor fie între structuri propoziționale similare, (p_k, p_k), fie dintre o structură și negația sa, $(p_k, \bar{p}_k)$. Deci, perechea de diagonale din tabelul unui operator conține ca puncte de „plecare-sosire” perechile (p_1, p_1), (p_{16}, p_{16}) pentru D_1, respectiv, (p_1, p_{16}), (p_{16}, p_1) pentru D_2; astfel că toate combinațiile ce definesc operațiunea o_x sub care apar diagonalele tabelului sunt definite: o_x(0 – 0), o_x(1 – 1) (din diagonala principală), o_x(0 – 1), o_x(1, 0) (din diagonala secundară). Așadar,$\forall$ $O_x(p_i, p_j)$, regula de compunere la nivel de structuri interne va fi cunoscută.

Necesitatea: Prin modul de organizare operațional, în fiecare tabel pot fi definite două diagonale:
D_1: $O_x(p_k, p_k)$ – diagonala principală și D_2: $O_x(p_k, \bar{p}_k)$ – diagonala secundară; prin repetiția structurilor de combinare din definiție, diagonalele pot lua ca valori fie p_k, fie $\bar{p}_k$ (ele includ cazurile fie p_1, fie p_{16}; pentru k = 1, valoarea diagonalei poate fi ori p_1, ori p_{16}, la fel valoarea de final, pentru k = 16). Sub legea O_x cu necesitate, diagonalele (D_i, i =1, 2) vor avea ca extremități două din valorile: $O_x(p_1, p_1)$, $O_x(p_{16}, p_{16})$, $O_x(p_1, p_6)$, $O_x(p_{16}, p_1)$ (D^j, j = 1, 2, 3, 4), deci în total 4 x 4 = 16 cazuri. Variantele posibile sunt trecute în *tabelul diagonalelor*, independent de semnificația operatorilor respectivi.

Tabelul Diagonalelor

	Operator cu diagonale	Regula diagonalelor		Operator cu diagonale	Regula diagonalelor
1.	$O_1(D_1^1, D_2^1)$	$O_1(p_k, p_k) = p_1$ $O_1(p_k, \bar{p}_k) = p_1$	9.	$O_9(D_1^4, D_2^1)$	$O_9(p_k, p_k) = \bar{p}_k$ $O_9(p_k, \bar{p}_k) = p_1$
2.	$O_2(D_1^3, D_2^1)$	$O_2(p_k, p_k) = p_k$ $O_2(p_k, \bar{p}_k) = p_1$	10.	$O_{10}(D_1^2, D_2^1)$	$O_{10}(p_k, p_k) = p_{16}$ $O_{10}(p_k, \bar{p}_k) = p_1$
3.	$O_3(D_1^1, D_2^3)$	$O_3(p_k, p_k) = p_1$ $O_3(p_k, \bar{p}_k) = p_k$	11.	$O_{11}(D_1^4, D_2^3)$	$O_{11}(p_k, p_k) = \bar{p}_k$ $O_{11}(p_k, \bar{p}_k) = p_k$
4.	$O_4(D_1^3, D_2^3)$	$O_4(p_k, p_k) = p_k$ $O_4(p_k, \bar{p}_k) = p_k$	12.	$O_{12}(D_1^2, D_2^3)$	$O_{12}(p_k, p_k) = p_{16}$ $O_{12}(p_k, \bar{p}_k) = p_k$
5.	$O_5(D_1^1, D_2^4)$	$O_5(p_k, p_k) = p_1$ $O_5(p_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k$	13.	$O_{13}(D_1^4, D_2^4)$	$O_{13}(p_k, p_k) = \bar{p}_k$ $O_{13}(p_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k$

[16] Dacă se cunosc diagonalele, se cunoaște legea operatorului tabelar; dacă se cunoaște tabelul, se cunoaște legea diagonalelor.

6.	$O_6(D_1^3, D_2^4)$	$O_6(p_k, p_k) = p_k$ $O_6(p_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k$	14.	$O_{14}(D_1^2, D_2^4)$	$O_{14}(p_k, p_k) = p_{16}$ $O_{14}(p_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k$
7.	$O_7(D_1^1, D_2^2)$	$O_7(p_k, p_k) = p_1$ $O_7(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$	15.	$O_{15}(D_1^4, D_2^2)$	$O_{15}(p_k, p_k) = \bar{p}_k$ $O_{15}(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$
8.	$O_8(D_1^3, D_2^2)$	$O_8(p_k, p_k) = p_k$ $O_8(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$	16.	$O_{16}(D_1^2, D_2^2)$	$O_{16}(p_k, p_k) = p_{16}$ $O_{16}(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$

DIFERENȚA DINTRE OPERATOR TABELAR ȘI REZULTAT AL ACȚIUNII OPERAȚIONALE. SEMNIFICAȚII RELATIVE ÎNTRE PROPOZIȚIA CONTRADICTORIE ȘI TAUTOLOGICĂ

Așa cum s-a mai subliniat aici, un tip de entitate este operatorul tabelar (legat structural de propozițiile conținute ca rezultat al propriei acțiuni) și altă entitate este propoziția sau operațiunea logică a cărei acțiune este generalizată. Prin operatorul contradicției (respectiv al tautologiei) se exprimă doar contradicția (respectiv tautologia), ca propoziții. Contradicția și tautologia sunt cei mai „parcimonioși” operatori din perspectiva exprimării altor propoziții, ele se exprimă numai pe sine. Dar cele două entități apar și ca propoziții rezultat al acțiunii altor operatori. Ca propoziție rezultat, contradicția arată opoziția sau că nu există o anumită relație între identici și neidentici, iar tautologia arată existența acelei relații. Contradicția (p_1) se poate exprima direct (apare ca rezultat propozițional) prin toți ceilalți operatori, în afară de tautologie (O_{16}) și reciproc.

ULG_2 permite studiul semnificației relative dintre propoziția tautologică (p_{16}) și propoziția contradictorie (p_1), sub legea altor operatori tabelari. Astfel, $\exists!\, z$ a.î. au loc:

(1) $O_z(p_1, p_k) = p_{16}$
(2) $O_z(p_{16}, p_k) = p_k$
(3) $O_z(p_k, p_{16}) = p_{16}$
(4) $O_z(p_k, p_k) = p_{16}$
(5) $O_z(p_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k$
(6) $O_z(\bar{p}_k, p_k) = p_k$

fiecare cu atâtea rezultate, câte situații combinaționale apar în matricea operatorului respectiv.

Legea $O_z$arată un *sens* între propozițiile pe care le are ca argument, adică:

(1) Sensul de la contradicția p_1 la p_k (orice funcție propozițională) este p_{16} (tautologia);

(2) Sensul de la p_{16} (tautologie) la p_k(orice funcție propozițională) este p_k;așadar, dacă k = 1, atunci sensul de la p_{16} la p_1 (de la tautologie la contradicție) este contradicția.

(3) Arată că sensul de la p_k (orice propoziție) la p_{16} este p_{16} (tautologia); așadar, dacă k = 1, sensul de la contradicție la tautologie este tautologia.

(4) Arată că sensul de la p_k la p_k este p_{16} (sensul, relațiadintre identicieste tautologia).

(5) și (6) arată că sensul de la o propoziție la negația sa este negația sa. Ultimele două proprietăți sunt suficiente pentru a conferi axiomele implicației.

Analitic, $O_z(p_j, p_s) = \begin{cases} p_{16}\ , dacă\ j = 1,\ \ sau\ s = 16, sau\ j = s \\ p_s\ , dacă\ j = 16 \\ \bar{p}_j\ ,\ dacă\ s = 17 - j \end{cases}$

O_z arată sensul relativ dintre două propoziții conținute ca argument și operatorul care verifică axioma de mai sus este O_{14} (z = 14) corespunzător operațiunii „implicație directă”.

Axioma nu dă sensul concret al acțiunii implicației la nivelul fiecărei celule a tabelului, ci pe acela al acțiunii la nivelul structurilor interne propoziționale. Astfel, dacă pe cele trei nivele logice avute în vedere, asimilez valoarea de adevăr „0” lui p_1 (C) și pe „1” lui p_{16}, (T), atunci voi cunoaște modul de acțiune al implicației pentru toate cazurile particulare. În aceeași manieră orice compunere de propoziții în genere, $O_x(p_k, p_j)$, se reduce la acțiunea operațiunii la nivel de structuri interne, adică a compuneri de tipul O_x(0, 0), O_x(0, 1), O_x(1, 0), O_x(1, 1), cu rezultatele respective de la caz la caz.

p_1 și p_{16} reprezintă propoziții opuse ca structuri interne de valori de adevăr, ceea ce se reflectă și asupra semnificației operatorilor O_1 și O_{16}: p_{16} exprimă tautologia și face[17] conținutul lui O_{16}, conferindu-i acestuia atributul de operator tautologic (T); p_1 exprimă contradicția și face conținutul lui O_1 , care este operatorul contradicției (C).

Asimetria operatorilor asimilați contradicției C și tautologiei T din O_{14} este „compensată” de O_{12}, cu regulile de acțiune a implicației inverse:
(1°) $O_{12}(p_1, p_k) = \bar{p}_k$;
(2°) $O_{12}(p_{16}, p_k) = p_{16}$;
(3°) $O_{12}(p_k, p_{16}) = p_k$;
(4°) $O_{12}(p_k, p_k) = p_{16}$;
(5°) $O_{12}(p_k, \bar{p}_k) = p_k$;
(6°) $O_{12}(\bar{p}_k, p_k) = \bar{p}_k$;

$$O_{12}(p_j, p_s) = \begin{cases} \bar{p}_s,\ \ dacă\ j = 1 \\ p_{16}\ , dacă\ j = 16,\ \ sau\ s = 1, sau\ j = s \\ p_j\ , dacă\ s = 16,\ \ sau\ s = 17 - j \end{cases}$$

O_{14} și reciprocul său O_{12} au în comun sensul tautologic al identității între identici, primul de la „stânga” la „dreapta”, al doilea de la „dreapta” la „stânga” (4 și 4° exprimă faptul că sensul de acțiune al implicației între identici (de la p_k la p_k) funcționează la fel în ambele direcții).

Același sens al identității tautologice dintre identici este exprimat și de O_{10}, în schimb O_{10} este invariant la schimbarea ordinii argumentelor sale (operatorul este comutativ):
(1`) $O_{10}(p_1, p_k) = O_{10}(p_k, p_1) = \bar{p}_k$;
(2`), (3`) $O_{10}(p_{16}, p_k) = O_{10}(p_k, p_{16}) = p_k$;
(4`) $O_{10}(p_k, p_k) = p_{16}$.

[17] Ca propoziție, deci ca rezultat al acțiunii unei operațiuni asupra bazelor atomare.

Negatul său, O_7, reflectă excluziunea dintre identici:
(1'') $O_7(p_1, p_k) = O_7(p_k, p_1) = p_k$;
(2''), (3`) $O_7(p_{16}, p_k) = O_7(p_k, p_{16}) = \bar{p}_k$;
(4'') $O_7(p_k, p_k) = p_1$.

Tautologia și Contradicția constituie baza conceptelor de simetrie totală și semnificații opuse, marchează limitele ULG_2 , celelalte tabele (operatori) se grupează simetric față de ele.

O ALTĂ DEFINIȚIE A OPERATORILOR IMPLICAȚIEI

O definiție sintetică a operatorilor implicației este următoarea: dacă pentru i, j, k, și O_x pentru care $O_x(p_i, p_j) = O_x(p_j, p_k) = O_x(p_i, p_k) = p_{16}$ sau p_1[18], atunci O_x este O_{14} sau O_{12}, respectiv O_3, sau O_5, cu relația dintre ei $O_3 = N(O_{14})$, $O_5 = N(O_{12})$.

În cadrul relației generale, există $i = j = k$, ($i, j, k, = \overline{1, 16}$), astfel ca $O_{14}(p_i, p_i) = p_{16}$, (dacă i =1, $O_{14}(p_1, p_1) = p_{16}$ – contradicția se implică pe sine), pt. i =16, $O_{14}(p_{16}, p_{16}) = p_{16}$ – tautologia se implică pe sine); dacă $i = 1$, $j = k = 16$, $O_{14}(p_1, p_{16}) = p_{16}$ (contradicția implică tautologia; simetric tautologia implică în mod contradictoriu contradicția); în rest, orice propoziție p_i se implică pe sine.

De asemenea, regula generală de mai sus e respectată și pentru i, $j = k = 16$, deci

$O_{14}(p_k, p_{16}) = p_{16}, \forall k$. Reciproc, se găsește că $O_{14}(p_{16}, p_k) = p_k$ etc. Relația generală expusă aici e definitorie pentru operatorii implicației (directe, reciproce și a negatelor acestora).

În Anexa ULG_2 am evidențiat situațiile în care apar astfel de triplete și pentru operatorii implicației. E remarcabil că dacă sub acțiunea unui operator tabelar apare o asemenea structură, ea modelează întregul tabel, „golurile” rămase au aparența unor structuri asemenea, care reproduc, în mic, modelul de bază al tabelului indus de operatorul respectiv. Logica bidimensională face „vizibile” reguli fundamentale (conține rezultate nevizibile la nivelul logicii unidimensionale din SL).

O ALTĂ DEFINIȚIE A OPERATORILOR O_7 ȘI O_{10}

O definiție mai „puternică”(sintetică) pentru operatorii echivalenței și cel simetric față de negație, al exclusivității, este legată de relația de „circularitate” pe care o instituie cei doi operatori tabelari. Algebric, e vorba de asociativitatea operatorilor respectivi care induc matricilor corespunzătoare structuri de grup comutativ: diferența dintre ele este că, în cazul grupului (p_k, O_{10}), elementul neutru este tautologia, p_{16}, pentru (p_k, O_7), elementul neutru este contradicția, p_1. În rest,

[18] Dacă relația are loc pentru două perechi de indici, atunci cu necesitate e valabilă și pentru perechea rămasă, cu condiția să se păstreze ordinea circulară (operatorul nu este comutativ).

fiecare operație este comutativă, asociativă și elementul neutru al fiecărei propoziții este ea însăși. Definiția celor doi operatori simetrici față de negație este următoarea:

Pentru orice triplete de indici $k, i, j \exists O_x$ cu proprietățile:

$p_k = O_x(p_j, p_i) = O_x(p_i, p_j)$;

$p_j = O_x(p_k, p_i) = O_x(p_i, p_k)$;

$p_i = O_x(p_j, p_k) = O_x(p_k, p_j)$,

atunci O_x este O_{10} sau O_7, relația dintre ele fiind $O_{10} = N(O_7)$.

$\forall p_k$, $O_{10}(p_k, p_k) = p_{16}$, $O_7(p_k, p_k) = p_1$. O_{10} conservă sensul identității tautologice dintre identici, O_7, sensul neidentității dintre identici al contradicției. Desigur, p_k în relația O_7 cu contradicția (p_1) este ea însăși, p_k în relația O_{10} cu tautologia (p_{16}) este ea însăși:

$O_7(p_k, p_1) = p_k$, $O_{10}(p_k, p_{16}) = p_k$; $O_7(p_k, p_{16}) = \bar{p}_k$, $O_{10}(p_k, p_{16}) = p_k$.

NEGAȚIE ȘI TRANSMUTAȚIE

Există doi operatori tabelari din care reiese că fiecare propoziție p_k poate fi obținută prin compunerea după legea respectivă a negației sale, fără ca legea respectivă să fie negația („negație de p", (O_{13}) sau „negație de q", (O_{11}); e vorba de O_{15} și O_9.

$O_{15}(p_k, p_k) = \bar{p}_k$, ($O_{15}(\bar{p}_k, \bar{p}_k) = p_k$) și $O_{15}(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$

$O_9(p_k, p_k) = \bar{p}_k$, ($O_9(\bar{p}_k, \bar{p}_k) = p_k$) și $O_9(p_k, \bar{p}_k) = p_1$

Deci $p_k = O_{15}(O_{15}(p_k, p_k), O_{15}(p_k, p_k)) = O_9(O_9(p_k, p_k), O_9(p_k, p_k))$.

Aceste relații sunt suficiente pentru a defini regulile operatorilor O_{15} și O_9 (prin trimitere la nivel de structuri interne propoziționale). Negatele lor conțin și un sens intuitiv:

$N(O_{15}(p_k, \bar{p}_k)) = O_2(p_k, \bar{p}_k) = O_2(\bar{p}_k, p_k) = p_1$

$O_2(p_k, p_k) = p_k$, ceea ce arată că la nivel de structuri interne, $O_2(0, 0) = 0$; $O_2(1,1) = 1$;

$O_2(1, 0) = O_2(0,1) = 0$, deci O_2 este operatorul conjuncției, operațiune cunoscută din SL.

De asemenea, $N(O_9(p_k, \bar{p}_k)) = O_8(p_k, \bar{p}_k) = O_8(\bar{p}_k, p_k) = p_{16}$; $O_8(p_k, p_k) = p_k$, ceea ce arată că la nivel de structuri interne, $O_8(0, 0) = 0$; $O_8(1,1) = 1$; $O_8(1, 0) = = O_8(0,1) = 1$, deci O_8 este operatorul disjuncției, operațiune cunoscută din SL.

Se poate scrie $p_k = N(O_{15}(p_k, p_k)) = O_2(p_k, p_k) = p_k \text{ și } p_k$;

$\bar{p}_k = N(O_{15}(\bar{p}_k, \bar{p}_k)) = O_2(\bar{p}_k, \bar{p}_k) = \bar{p}_k \text{ și } \bar{p}_k$.

O definiție sintetică a acestui grup de operatori (Scheffer, Nicod, Și, Sau) este următoarea: fie indicii t, x, y, z pentru care $O_t(p_x, p_y) = O_t(\bar{p}_y, p_z) = O_t(p_x, p_z) = p_{16}$, atunci $O_t = O_{15}$(Nicod) sau O_8 (Sau); dacă $O_t(p_x, p_y) = O_t(\bar{p}_y, p_z) = = O_t(p_x, p_z) = p_1$, atunci $O_t = O_2$ (Și) sau O_9 (Scheffer). Din aceste reguli decurg regulile diagonalelor, $O_{15}(p_k, p_k) = \bar{p}_k$, $O_{15}(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$, $O_8(p_k, p_k) = p_k$, $O_8(p_k, \bar{p}_k) = p_{16}$, respectiv $O_2(p_k, p_k) = p_k$, $O_2(p_k, \bar{p}_k) = p_1$, $O_9(p_k, p_k) = \bar{p}_k$, $O_9(p_k, \bar{p}_k) = p_1$ de unde se pot regăsifie celelalte reguli suficiente pentru a obține cazurile particulare, fie relațiile dintre structurile interne dedicate oricărei situații guvernate de operatorii menționați.

SEMNIFICAȚIA OPERATORILOR TABELARI

Operatorii tabelari $O_k(p_i, p_n)$ din ULG_2 capătă semnificație prin extinderea semnificației operațiunilor $o_k(p, q)$ din *SL* la un nivel superior.

$o_k(p,\ q)$ $\in$\{C(p_i, p_n), $\wedge(p_i, p_n)$, $\overline{\rightarrow}(p_i, p_n)$, $p_i(p_i, p_n)$, $\overline{\leftarrow}(p_i, p_n)$, $p_n(p_i, p_n)$, w(p_i, p_n), v(p_i, p_n), /(p_i, p_n), $\leftrightarrow(p_i, p_n)$, $\bar{p}_n(p_i, p_n)$, $\leftarrow(p_i, p_n)$, $\bar{p}_i(p_i, p_n)$, $\rightarrow(p_i, p_n)$, $\downarrow(p_i, p_n)$, T(p_i, p_n)\}. Astfel că operațiunile o_1, o_2, ..., o_{16}, definite în *SL* prin $o_k(p,\ q) = p_k$, o_C, $o_\wedge$, $o_{\overline{\rightarrow}}$, o_p, $o_{\overline{\leftarrow}}$, o_q, o_w, o_V, $o_/$, $o_\leftrightarrow$, $o_{\bar{q}}$, $o_\leftarrow$, $o_{\bar{p}}$, $o_\rightarrow$, $o_\downarrow$, o_T, își generalizează acțiunea la nivelul operatorilor matriceali $O_k(p_s,\ p_r)$, cărora le conferă semnificație generalizată.

Sintetic: $O_k(p_s, p_r) = o_k(p_{s,r}) = p_{s,r}$, fiecare termen cu 256 de componente. Propozițiile p_s, p_r, fuzionează după legea operațiunii o_k în propoziția $p_{s,r}$.

SENSURI LOGICO-FILOSOFICE

Logica bidimensională face vizibile 4 sensuri operaționale, fiecăruia fiindu-i alocate 4 operatori, în jurul cărora se grupează propozițiile logicii:

1. *Sensul dintre identici și neidentici*, specifici tautologiei, contradicției, echivalenței și excluziunii. Astfel, sensul relației de identitate dintre identici al tautologiei și sensul de neidentitate dintre neidentici al contradicției este conținut de echivalență. Sensul relației de identitate între neidentici al tautologiei și al relației de neidentitate dintre identici al contradicției este „preluat” sau exclusiv.

2. *Sensul afirmării și negării*: afirmație de p, afirmație de q, negație de p, negație de q, când una dintre componenetele operatorului este afirmată sau negată, cealaltă fiind neglijată.

3. *Sensul ordonării între Adevăr și Fals*, cu cei patru operatori ai implicației (directe, reciproce și negațiile lor). În acest caz, singur sensul de la *Adevăr* la *Fals* conduce la *Fals*, celelalte la *Adevăr*.

4. *Sensul conjugării și alegerii dintre identici și neidentici* (*Și, Sau*), al multiplicării și diversificării sub același operator (Scheffer, Nicod). Prin formele lor logice, operatorii din urmă pot fi supranumiți, ai „unității contrariilor”[19]: $p_k = \bar{p}_k$ / $\bar{p}_k$ = $\bar{p}_k \downarrow \bar{p}_k$; puterea lor de a exprima orice operator numai prin ei înșiși provine din preluarea funcției negației în propria structură.

De asemenea,

$\forall p_k$,p_k = (p_k / p_k) / (p_k / p_k) = $p_k \wedge p_k$ = p_k v p_k = ($p_k \downarrow p_k$) $\downarrow$($p_k \downarrow p_k$) etc.

Toate aceste sensuri sunt convergente (conduc la un rezultat din ULG_2) și circulare (depind și relaționează unele cu altele). Fiecare pereche de operatori opuși, începând cu contradicția și tautologia, poate constitui un punct de plecare al

[19] Se mai poate numi „diversitate în unitate” sau „simetrie în contradicție”.

generalizării semnului propozițional, determinant pentru ceilalți. De pildă, sensul afirmării și negării coroborat cu cel al multiplicării și diversificării conduc la dubla negație:
$\bar{p}_k = O_{15}(p_k, p_k)$; prin negație $\overline{\bar{p}_k} = N(O_{15}(p_k, p_k)) = O_2(p_k, p_k) = p_k$.

Legile lui De Morgan rezultă direct din tabelele lui O_2 sau O_8 sau prin citirea unor simetrii de felul: $p_k = \overline{\bar{p}_k} = \overline{\overline{p_k \wedge p_k}} = O_{13}(O_{15}(p_k, p_k) = \overline{\bar{p}_k \wedge \bar{p}_k}$ deci $\overline{p_k \wedge p_k} = \bar{p}_k \wedge \bar{p}_k$ etc. Evident că în Anexă se găsesc toate propozițiile așa-numitului calcul natural, ele trebuie doar transcrise în limbajul uzual.

De remarcat că între sensurile 3) și 4), aparent fără legătură, există „oglindiri" (așa cum se observă din Anexă) imprimate de felul în care se plasează p_{16} sau p_1. O_{14} și O_{15} au tabelele în oglindă și formula de trecere dintre ele este $O_{14}(p_k, p_j) = O_{15}(p_k, \bar{p}_j)$, practic propoziția negată „produce" oglindirea. O astfel de relație și altele similare sunt remarcabile prin facilitarea obținerii legilor specifice ale operatorilor tabelari din cele generale prin „treceri" între tabele.

Alte asemenea legături sunt:
$O_8(p_k, p_j) = O_{15}(\bar{p}_k, \bar{p}_j)$; $O_2(p_k, p_j) = O_9(\bar{p}_k, \bar{p}_j)$; în plus, $O_8 = N(O_9)$, $O_{15} = N(O_2)$, cu alte consecințe etc.

Propozițiile, marcând tautologia sau contradicția, imprimă sensul întreg al reprezentării. Fiecare structură a sensurilor operatorii notate mai sus 3) și 4) și evidențiate corespunzător în Anexă conține 3^4 căsuțe (fiind formată din 3 structuri asemenea, cu fiecare componentă formată din 3 substructuri asemenea, fiecare din cele 3 substructuri a câte 3 căsuțe); există structuri „active" și structuri „recesive"; rezultatele particulare sunt deja impregnate la nivel de structuri interne în tripletele respective. În aceeași măsură, toate configurațiile au fost definite în bloc, la nivel tabelar-operațional și decurg cu necesitate ca structuri logice în grupuri bidimensionale. În toată expunerea de până acum am folosit fie o cale analitică de definire a operațiunilor (cu acoladă), fie una sintetică (algebrică), mai generală[20]. Intenția este de a extrage din legile generale astfel definite pe cele specifice, la nivelul fiecărei celule a tabelelor. Inevitabil, totul se îndreaptă către o „logică fractală", concept care până în prezent comportă alte conotații decât cele de aici.

FORMA GENERALĂ A SEMNULUI PROPOZIȚIONAL (FGP)

Forma generală a semnului propozițional o reprezentaționez printr-o expresie de forma $O_t(p_i, p_n) \underset{R}{\equiv} p_m$[21] (I), adică: $\forall p_m$, $\exists O_t$, p_i, p_n, astfel încât să aibă loc relația de reprezentaționare. Convers, $\forall p_i$, p_n, O_t, $\exists p_m$ a.î. $O_t(p_i, p_n) \underset{R}{\equiv} p_m$. Aceste relații revin la proiecția unidimensională a logicii bidimensionale

[20] La nivel analitic, consider că am realizat acest lucru, prin generalizarea de la nivel de structuri interne propoziționale, la nivel de structuri interne tabelare. La nivel algebric, am trasat legile generale și căile de trecere spre legile specifice.

[21] Prin semnul $\underset{R}{\equiv}$ înțeleg *a reprezentaționa*. Relația de reprezentaționare folosită în locul semnului „=" este o relație de echivalență, dar are și sensul de așezare grafică vizuală.

reprezentaționate în Anexă. Cu aceste reprezentaționări se pot construi toate relațiile posibile din ULG_2[22].

Calitativ, fiecare popoziție din ULG_2 este rezultatul compunerii altor două propoziții după o anumită operațiune. Altfel: compunerea oricăror două propoziții după orice operațiune conduce la o propoziție din ULG_2. Rolul contradicției și tautologiei este dezvoltat, în ideea că p_1 și p_{16}, compuse cu $\forall p_k$ sub legea unor operatori O_t, pot rămâne în structura semnului propozițional generalizat, fără să împieteze asupra semnificației acestuia.

LEGI DE PREDICAȚIE A FGP PENTRU ULG_2

	p_i	p_n	O_t	p_m	Val. adevăr
1.	∀	∀	∀	∀	F
2.	∃	∀	∀	∀	F
3.	∀	∃	∀	∀	F
4.	∃	∃	∀	∀	F
5.	∀	∀	∃	∀	F
6.	∃	∀	∃	∀	A
7.	∀	∃	∃	∀	A
8.	∃	∃	∃	∀	A
9.	∀	∀	∀	∃	A
10.	∃	∀	∀	∃	A
11.	∀	∃	∀	∃	A
12.	∃	∃	∀	∃	A
13.	∀	∀	∃	∃	A
14.	∃	∀	∃	∃	A
15.	∀	∃	∃	∃	A
16.	∃	∃	∃	∃	A

Linia 9 se citește astfel: e adevărat că $\forall p_i, p_n, O_t, \exists\ p_m$ a.î. $O_t(p_i, p_n) \underset{R}{\equiv} p_m$; Din forma (I) de mai sus, ținând cont că $\forall\ p_i, \exists\ p_s, p_r$ a.î. $p_i \underset{R}{\equiv} O_k(p_s, p_r)$ (II), se obține o nouă expresie a FGP: $O_t(O_k(p_s, p_r), p_n)) \underset{R}{\equiv} p_m$ (III). Desigur că în relația (I), oricare dintre p_i, p_n, p_m poate fi înlocuită cu (II); e de preferat însă ca p_m să rămână fixat din start, pentru ca relația (I) de reprezentaționare să aibă o referință și e deajuns ca una din p_i sau p_n să fie substituită prin (II).

REPREZENTAȚIONĂRI NECESARE, FUNDAMENTALE ȘI SOLEMN ORDONATE ÎN ULG_2. APLICAȚII

În continuare, voi reprezentaționa cu titlu exemplificativ modul în care angrenează structurile interne propoziționale din ULG_2 doar pentru o secțiune a lui

[22] Asupra numărului lor finit sau infinit, mă voi pronunța în cotinuarea studiului prezent.

și apoi pentru a transcrie unele relații în funcție de anumiți operatori logici. Anexa ULG_2 poate fi utilă în diverse aplicații prin transcrierea ei în limbaj uzual, fiindcă acoperă și conține toate combinațiile posibile dintre funcțiile logice și care s-au consacrat sub titlul de „tautologii”[23].

Fie următoarea secțiune a ULG_2 cu $O_x = (1,0,0,1)^t$ și $p_k \underset{R}{\equiv} p_2$ fixate și p_j, j = 1,16.

Atunci tabelul de mai jos conține structurile interne ale compunerii $O_x(p_k, p_j)$:

p	q	Ox	pk	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		Ox(pk, pj)		1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
				1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
				1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
				0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
				p15	p16	p13	p14	p11	p12	p9	p10	p7	p8	p5	p6	p3	p4	p1	p2
				/	T	$\bar{p}$	→	$\bar{q}$	←	↓	↔	w	v	$\overline{\leftarrow}$	q	$\overline{\rightarrow}$	p	C	[illegible]

În cazul particular din tabel am ales O_x ca fiind O_{10}, p_k este p_2 (linia rezultatelor se regăsește în Anexa ULG_2 în tabelul operatorului O_{10} pe linia 2). Pe ultima linie a tabelului am simbolizat schematic operațiunile binecunoscute din *SL*, ca rezultate intuitive. În logica bidimensională pe care am schițat-o, expresiile riguroase ale rezultatelor sunt următoarele:

1) $O_{10}(p_2, p_1) \underset{R}{\equiv} p_{15}$;
2) $O_{10}(p_2, p_2) \underset{R}{\equiv} p_{16}$;
3) $O_{10}(p_2, p_3) \underset{R}{\equiv} p_{13}$
4) $O_{10}(p_2, p_4) \underset{R}{\equiv} p_{14}$
5) $O_{10}(p_2, p_5) \underset{R}{\equiv} p_{11}$
6) $O_{10}(p_2, p_6) \underset{R}{\equiv} p_{12}$
7) $O_{10}(p_2, p_7) \underset{R}{\equiv} p_9$
8) $O_{10}(p_2, p_8) \underset{R}{\equiv} p_{10}$
9) $O_{10}(p_2, p_9) \underset{R}{\equiv} p_7$
10) $O_{10}(p_2, p_{10}) \underset{R}{\equiv} p_8$
11) $O_{10}(p_2, p_{11}) \underset{R}{\equiv} p_5$
12) $O_{10}(p_2, p_{12}) \underset{R}{\equiv} p_6$
13) $O_{10}(p_2, p_{13}) \underset{R}{\equiv} p_3$

[23] O relație dintre două funcții de adevăr dacă este tautologică, valorile lor de adevăr pot fi indiferente, căci tautologia uniformizează ca adevărate relațiile dintre identici și neidentici. Deci, termenul a fost folosit abuziv.

14) $O_{10}(p_2, p_{14}) \underset{R}{\equiv} p_4$
15) $O_{10}(p_2, p_{15}) \underset{R}{\equiv} p_1$
16) $O_{10}(p_2, p_{16}) \underset{R}{\equiv} p_2$

Toate asemenea relații se pot proiecta în logica unidimensională (*SL*):
1) (p^q)↔ C = p / q;
2) (p^q)↔ (p^ q) = T;
3) (p^q)↔ (p $\overline{\rightarrow}$ q) = $\bar{p}$;
4) (p^q)↔ p = p → q;
5) (p^q)↔ (p $\overline{\leftarrow}$ q) = $\bar{q}$;
6) (p^q)↔ q = p ← q;
7) (p^q)↔ (pwq) = p ↓ q;
8) (p^q)↔ (pvq) = (p ↔q);
9) (p^q)↔ (p ↓ q) = p w q;
10) (p^q)↔ (p ↔ q) = p v q;
11) (p^q)↔ $\bar{q}$ = p $\overline{\leftarrow}$ q;
12) (p^q)↔ p ← q;
13) (p^q)↔ $\bar{p}$ = p $\overline{\rightarrow}$ q;
14) (p^q)↔ (p → q) = p;
15) (p^q)↔ (p/q) = C;
16) (p^q)↔T = (p^q).

Astfel de expresii sunt obținute nu prin calcul logic, ci pe baza relațiilor dintre structurile interne propoziționale, în urma stabilirii semnificației operatorilor tabelari bidimensionali și reprezentaționarea lor prin reducere la semnificația operațiunilor din *SL*.

EXPRESII UTILE

Spre exemplificarea utilității Anexei ULG_2, mă opresc la tabelul echivalenței (O_{10}), spre a transcrie doar linia corespunzătoare lui $O_{10}(p_{10}, p_i)$, cu 16 rezultate utile pentru surprinderea celor mai comode căi de transcriere a legilor logice unele în funcție de altele:
1. (p ↔ q) ↔ C = (p w q); (p_7)
2. (p ↔ q) ↔ (p^q) = (p v q); (p_8)
3. (p ↔ q) ↔ (p $\overline{\rightarrow}$ q) = (p $\overline{\leftarrow}$ q); (p_5)
4. (p ↔ q) ↔ p = q; (p_6)
5. (p ↔ q) ↔ (p $\overline{\leftarrow}$ q) = (p $\overline{\rightarrow}$ q); (p_3)
6. (p ↔ q) ↔ q = p; (p_4)
7. (p ↔ q) ↔ (p w q) = C; (p_1)
8. (p ↔ q) ↔ (p v q) = (p^q); (p_2)
9. (p ↔ q) ↔ (p / q) = (p ↓ q); (p_{15})

10. (p ↔ q) ↔ (p ↔ q) = T; (p_{16})
11. (p ↔ q) ↔ $\bar{q}$ = $\bar{p}$; (p_{13})
12. (p ↔ q) ↔ (p ← q) = (p → q); (p_{14})
13. (p ↔ q) ↔ $\bar{p}$ = $\bar{q}$; (p_{11})
14. (p ↔ q) ↔ (p → q) = (p ← q); (p_{12})
15. (p ↔ q) ↔ (p ↓ q) = (p / q); (p_9)
16. (p ↔ q) ↔ T = (p ↔ q); (p_{10})

Aplicând acestor egalități (în fond, relații de reprezentaționare) încă o dată operatorul echivalenței (O_{10}), formula (p ↔ q) dispare din membrul stâng și apare în cel drept; de pildă, din 9), 15) se obțin relațiile reciproce dintre simbolurile Scheffer și Nicod mijlocite de echivalență[24]:
(p / q) = (p ↓ q) ↔ (p ↔ q);
(p ↓ q) = (p / q) ↔ (p ↔ q);
(p / q) ↔ (p ↓ q) = (p ↔ q).

COMPLETITUDINE OPERAȚIONALĂ

Prin studiul Anexei ULG_2 se pot găsi imediat modurile cele mai simple de exprimare ale tuturor funcțiilor propoziționale în funcție de operatorii cu statut special, O_{15} (Nicod) și O_9 (Sheffer). În conținutul tabelului O_{15}, voi căuta să exprim p_1 (contradicția). Aceasta apare doar în ultima căsuță a tabelului: $O_{15}(p_{16}, p_{16}) = p_1$; în schimb, tautologia apare în 81 de căsuțe. Cele mai eficiente moduri de reprezentaționare sunt cele în care propozițiile componente au forma cea mai simplă.

De exemplu, $O_{15}(p_4, p_{13}) = p_{16}$; adică p ↓ (p ↓ p) = T; deci
C = (p ↓ (p ↓ p)) ↓ (p ↓ (p ↓ p)) etc.
Analog stau lucrurile în cazul operatorului O_9:
$O_9(p_1, p_1) = p_{16}$ și $O_9(p_4, p_{13}) = p_1$; adică
p / (p / p) = C, deci T = (p / (p / p)) / (p / (p / p)).

Echivalența, p_{10}, are un singur mod de a se exprima prin operatorul O_{15}, astfel ca să nu se exprime în funcție de negația sa, p_7: $p_{10} = O_{15}(p_{15}, p_8)$, unde $p_8 = O_{15}(p_{13}, p_{11})$, adică
p v q = $\bar{p}$ ↓ $\bar{q}$ = (p ↓ p) ↓ (q ↓ q); deci p_{10} este (p ↔ q) = (p ↓ q) ↓ ((p ↓ p) ↓ (q ↓ q));

Categoria de operatori de tipul „implicație” se regăsesc astfel:
$p_{14} = O_{15}(p_4, p_{11}) = O_{15}(p_4, p_{15})$, adică
p → q = p↓ $\bar{q}$ = p ↓ (q ↓ q) = p ↓ (p ↓ q);
Negarea implicației, $p_3 = O_{15}(p_{14}, p_{14})$, adică p $\overline{\rightarrow}$ q = (p → q)↓(p → q) etc.
Sau $p_3 = O_{15}(p_{16}, p_{14})$ = T ↓ (p ↓ (q ↓ q)) = T ↓ (p ↓ (p ↓ q)) etc.
Cea mai simplă cale de a obține replicația este formula
$O_{15}(p_6, p_{13}) = p_{12}$, deci p ← q = ((p ↓ p) ↓ q); desigur că aceste soluții nu sunt unice: de pildă,

[24] De altfel rezultatele oricăror calcule elementare din ULG_2 *se află deja* în Anexă, ele trebuie doar *evidențiate*.

$O_{15}(p_{13}, p_7) = O_{13}(p_{13}, p_8) = p_{12}$ etc.

O formulă care s-ar putea numi „de confirmare” este cea cu următoarea descriere:

$O_{15}(o_4(p, q), o_6(p, q)) = O_{15}(p_4, p_6) = O_{15}(p, q)$ = p ↓ q. Nu mai insist în acest sens; cititorul interesat poate redescoperi relații binecunoscute, dar expuse mult mai *vizibil* în Anexa ULG_2.

Desigur că toate asemenea expresii pot deveni utile pentru reconsiderarea posibilității definirii numărului natural din perspectiva unei logici realist intensionale, în care propozițiile logicii pot „transmuta” prin acțiunea unor operatori adecvați. Exigențele obținerii unei FGP țin de:

– posibilitatea ca orice propoziție să exprime un sens nou sau unul bine stabilit din ULG;

– în procesul de dezvoltare a semnului propozițional să se evite buclele sau definițiile circulare;

– să se profite de structurile interne cele mai permisive ale operatorilor tabelari; dintre aceștia se pot remarca O_{10} și O_7, organizate algebric ca structuri de grup.

– atâta timp cât FGP pornește de la o reprezentaționare $O_t(p_i, p_n) \underset{R}{\equiv} p_m$, $p_i \underset{R}{\equiv} O_k(p_s, p_r)$, propozițiile componente fac parte din structuri al căror ordin spațial pot crește indefinit conform regulilor stabilite, semnul propozițional obținut are din start semnificație și ține doar de resursele interne operaționale de a construi șiruri propoziționale cât mai „lungi”, mai precis formule valide de un ordin cât mai înalt.

PERSPECTIVE LOGICISTE
ÎN VEDEREA DEFINIRII NUMĂRULUI NATURAL

Dacă în TLP „propoziția determină un loc în spațiul logic” (3.4, 3.42), în ULG propoziția ocupă mai multe „locuri”, ceea ce constituie un avantaj ca posibilități interne de reprezentaționare a ei. Cele 4096 de relații de reprezentaționare din **Anexă** grupate în 16 tabele operaționale acoperă toate variantele de combinații posibile dintre propozițiile logicii. Pe baza lor se pot construi un număr infinit de relații logice? Desigur că unele dintre aceste relații sunt triviale, unii operatori sunt „săraci” în a permite realizarea de combinații, alții dimpotrivă. A găsi o succesiune *infinită* de operațiuni ține de construcția unor lanțuri de operațiuni care să nu se învârtă în cerc ori să înainteze în gol. Din punctul meu de vedere, există mai multe tipuri de *formule infinite* (liniare, recursive, ciclice, oscilante etc.), dar problema de fond ține de *structura infinitului* și cum se obține el. Fiindcă metodele algoritmice par să conducă la oprirea șirului ori la convergența lui rapidă[25].

Plecând de la FGP sub forma $O_t(O_k(p_s, p_r), p_n)) \underset{R}{\equiv} p_m$ (III), întrebarea care se pune este cât de „lung” poate deveni un astfel de lanț și dacă el permite

[25] Așa se întâmplă în TLP cu operațiunea *N*, când propoziția rezultat devine la rândul ei argument. Și în logica bidimensională se pot construi situații asemănătoare. De natura și construcția infinitului logic mă voi ocupa într-un studiu ulterior.

dezvoltarea de noi propoziții pe baza celor existente, în cadrul relației de reprezentaționare și care să aibă semnificație. Cât de mult se poate dezvolta o propoziție (și prin ea toate celelalte) astfel ca să se obțină șiruri infinite cu semnificație? E posibil acest lucru? În acest articol nu voi da un răspuns ferm, ci voi construi un astfel de șir într-un mod intuitiv (și nu algoritmic).

Cei mai „generoși” operatori sunt cel al echivalenței și negatul său, al disjuncției exclusive. De altfel matricile corespunzătoare se constituie într-o structură de grup algebric, cu resurse combinatoriale speciale. Pe baza formei generale (III), caut șiruri de tipul

$O_t(O_k(O_{k_1}(O_{k_2}(\dots(O_{k_n}(p_s, p_{r_n}), p_{r_{n-1}})\dots, p_{r_1}), p_r, p_n) \underset{R}{=} p_m$ (IV)

Pentru aceasta, voi proceda la o rescriere a ULG_2 prin care voi pune în valoare situațiile de reprezentaționare a fiecărui tip de propoziție din fiecare tabel (tip operațional). Folosind structuri de tipul general de mai jos, vom constata că simetria se strică, în funcție de ocurențele fiecărei propoziții:

	p_1	p_2	…	p_k
O_j	(p_{x_1}, p_{y_1})	(p_{x_2}, p_{y_2})	…	(p_{x_k}, p_{y_k})
	…	…	…	…

dacă există, $p_k = O_j(p_{x_k}, p_{y_k})$; $k, j = \overline{1, 16}$.

Voi alege să transcriu după modelul de mai sus matricea O_{10} (operatorul echivalenței). Va rezulta un tablou simetric:

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
O10	(p1, p16)	(p1, p15)	(p1, p14)	(p1, p13)	(p1, p12)	(p1, p11)	(p1, p10)	(p1, p9)	(p1, p8)	(p1, p7)	(p1, p6)	(p1, p5)	(p1, p4)	(p1, p3)	(p1, p2)	(p1, p1)
	(p2, p15)	(p2, p16)	(p2, p13)	(p2, p14)	(p2, p11)	(p2, p12)	(p2, p9)	(p2, p10)	(p2, p7)	(p2, p8)	(p2, p5)	(p2, p6)	(p2, p3)	(p2, p4)	(p2, p1)	(p2, p2)
O10	(p3, p14)	(p3, p13)	(p3, p16)	(p3, p15)	(p3, p10)	(p3, p9)	(p3, p12)	(p3, p11)	(p3, p6)	(p3, p5)	(p3, p8)	(p3, p7)	(p3, p2)	(p3, p1)	(p3, p4)	(p3, p3)
	(p4, p13)	(p4, p14)	(p4, p15)	(p4, p16)	(p4, p9)	(p4, p10)	(p4, p11)	(p4, p12)	(p4, p5)	(p4, p6)	(p4, p7)	(p4, p8)	(p4, p1)	(p4, p2)	(p4, p3)	(p4, p4)
O10	(p5, p12)	(p5, p11)	(p5, p10)	(p5, p9)	(p5, p16)	(p5, p15)	(p5, p14)	(p5, p13)	(p5, p4)	(p5, p3)	(p5, p2)	(p5, p1)	(p5, p8)	(p5, p7)	(p5, p6)	(p5, p5)
	(p6, p11)	(p6, p12)	(p6, p9)	(p6, p10)	(p6, p15)	(p6, p16)	(p6, p13)	(p6, p14)	(p6, p3)	(p6, p4)	(p6, p1)	(p6, p2)	(p6, p7)	(p6, p8)	(p6, p5)	(p6, p6)
O10	(p7, p10)	(p7, p9)	(p7, p12)	(p7, p11)	(p7, p14)	(p7, p13)	(p7, p16)	(p7, p15)	(p7, p2)	(p7, p1)	(p7, p4)	(p7, p3)	(p7, p6)	(p7, p5)	(p7, p8)	(p7, p7)
	(p8, p9)	(p8, p10)	(p8, p11)	(p8, p12)	(p8, p13)	(p8, p14)	(p8, p15)	(p8, p16)	(p8, p1)	(p8, p2)	(p8, p3)	(p8, p4)	(p8, p5)	(p8, p6)	(p8, p7)	(p8, p8)
O10	(p9, p8)	(p9, p7)	(p9, p6)	(p9, p5)	(p9, p4)	(p9, p3)	(p9, p2)	(p9, p1)	(p9, p16)	(p9, p15)	(p9, p14)	(p9, p13)	(p9, p12)	(p9, p11)	(p9, p10)	(p9, p9)
	(p10, p7)	(p10, p8)	(p10, p5)	(p10, p6)	(p10, p3)	(p10, p4)	(p10, p1)	(p10, p2)	(p10,p15)	(p10,p16)	(p10,p13)	(p10,p14)	(p10,p11)	(p10,p12)	(p10, p9)	(p10,p10)
O10	(p11, p6)	(p11, p5)	(p11, p8)	(p11, p7)	(p11, p2)	(p11, p1)	(p11, p4)	(p11, p3)	(p11,p14)	(p11,p13)	(p11,p16)	(p11,p15)	(p11,p10)	(p11, p9)	(p11,p12)	(p11,p11)
	(p12, p5)	(p12, p6)	(p12, p7)	(p12, p8)	(p12, p1)	(p12, p2)	(p12, p3)	(p12, p4)	(p12,p13)	(p12,p14)	(p12,p15)	(p12,p16)	(p12, p9)	(p12,p10)	(p12,p11)	(p12,p12)
O10	(p13, p4)	(p13, p3)	(p13, p2)	(p13, p1)	(p13, p8)	(p13, p7)	(p13, p6)	(p13, p5)	(p13,p12)	(p13,p11)	(p13,p10)	(p13, p9)	(p13,p16)	(p13,p15)	(p13,p14)	(p13,p13)
	(p14, p3)	(p14, p4)	(p14, p1)	(p14, p2)	(p14, p7)	(p14, p8)	(p14, p5)	(p14, p6)	(p14,p11)	(p14,p12)	(p14, p9)	(p14,p10)	(p14,p15)	(p14,p16)	(p14,p13)	(p14,p14)
O10	(p15, p2)	(p15, p1)	(p15, p4)	(p15, p3)	(p15, p6)	(p15, p5)	(p15, p8)	(p15, p7)	(p15,p10)	(p15, p9)	(p15,p12)	(p15,p11)	(p15,p14)	(p15,p13)	(p15,p16)	(p15,p15)
	(p16, p1)	(p16, p2)	(p16, p3)	(p16, p4)	(p16, p5)	(p16, p6)	(p16, p7)	(p16, p8)	(p16, p9)	(p16,p10)	(p16,p11)	(p16,p12)	(p16,p13)	(p16,p14)	(p15,p15)	(p16,p16)

Pe baza operatorului echivalenței, redau un șir (neoptimizat) care nu conține bucle, definiții circulare, contradicții sau tautologii (ele pot face parte din șir atâta timp cât nu îi limitează dezvoltarea), ca reprezentaționare ce sugerează înaintarea într-un șir de forme logice ce au din start semnificație pe care caută să o exprime cât mai complet, într-un șir „cât mai lung”, deci care să folosească cât mai multe propoziții din tabel[26].

[26] Termenii metaforici sau neprecizați din acest paragraf vor căpăta o semnificație adecvată într-un studiu ulterior.

Fie o propoziție oarecare: $O_{10}(p_2, p_{14}) \underset{R}{\equiv} p_4$; (p).
$p_2 = O_{10}(p_{13}, p_3)$;
$p_{13} = O_{10}(p_{10}, p_{11})$;
$p_{10} = O_{10}(p_{15}, p_9)$;
$p_{15} = O_{10}(p_5, p_6)$;
$p_5 = O_{10}(p_{13}, p_8)$;
$p_{13} = O_{10}(p_7, p_6)$;
$p_7 = O_{10}(p_3, p_{12})$;
$p_3 = O_{10}(p_8, p_{11})$;
$p_8 = O_{10}(p_{15}, p_7)$;
$p_{15} = O_{10}(p_{12}, p_{11})$;
$p_{12} = O_{10}(p_9, p_{13})$;
$p_9 = O_{10}(p_3, p_6)$;
$p_3 = O_{10}(p_5, p_{10})$; șirul se oprește aici, conform exigențelor impuse mai sus[27]. Se poate scrie:
$O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(O_{10}(p_5, p_{10}), p_6), p_{13}), p_{11}), p_7), p_{11}), p_{12}), p_6), p_8), p_6), p_9), p_{11}), p_3), p_{14}) = p_4$; prin reintrarea lui p_4 în rolul propoziției atomare p, șirul se poate dezvolta indefinit.

*

Modelul liniar este cel al unui pește prins într-o plasă aflată într-o plasă unde mai este prins un pește, aflată într-o plasă cu încă un pește și așa mai departe. Modelul exponențial, mai precis, realist intensional, este cel în care fiecare pește a înghițit toate plasele cu toți ceilalți pești din ele. Astfel că o formulare calitativă a principiului de generalitate ar suna cam așa: „orice propoziție conține orice propoziție logică” și la rându-i e conținută în ea.

BIBLIOGRAFIE

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*:

– [text paralel german-englez], trad. D.F. Pears și B.F. Mc. Guiness, introducere de Bertrand Russell, London Routledge & Kegan Paul, 1961;

– [în limba germană], urmat de *Tagebücher 1914–1916* și *Philosophische Untersuchungen*, în „Schriften 1”, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1969;

– [în limba română], traducere, cuvânt introductiv și note de Alexandru Surdu, Editura Humanitas, București, 1991;

– Black, Max, *A Companion to Wittgenstein's Tractatus*, University Press, Cambridge, 1964;

Grigoriu, Iulian

– *Cu Wittgenstein la mănăstire*, Editura Paideia, București, 2003;

– „Filosofia matematicii și eșecul logicist în *Tractatus Logico-Philosophicus*”, în „Probleme de Logică”, vol. XXI, Editura Academiei Române, București, 2018, pp. 67–95.

[27] Din tabelul de mai sus, singura formă nefolosită este $O_{10}(p_{12}, p_3) = p_7$!