NUMĂRUL REAL, O UTOPIE. WITTGENSTEIN *VS* CANTOR, DEDEKIND ȘI CONSTRUCȚIA ZECIMALĂ

IULIAN GRIGORIU

Universitatea Dunărea de Jos, Galați

THE REAL NUMBER – AN UTOPIA. WITTGENSTEIN *VS* CANTOR, DEDEKIND, AND DECIMAL CONSTRUCTION

Abstract. Wittgenstein brings philosophical arguments against extensionalist conceptions of the real number by criticizing the theories of Cantor, Dedekind, and the decimal construction. It is about the unjustified use of the concepts of rule, infinity, generality. I analyse the Wittgensteinian concepts of: rule, the generalization of mathematical operations, andthe transition from logicism and logical space to a mathematical grammatical space. Variables are used instead of definitions because they are formal signs that reflect generality much better than definitions, which are usually limited. Two essential criticisms emerge about the general scheme of a rule applied to signs. Firstly, the symbolic rule hides mathematical reality and secondly, there is a conflict between rule and generality, validity and usage, general rule and particular rules, intensional and extensional. There is a hiatus, a metaphysical gap between the general sign and the concrete number, between the possible and the real. With this, the difference is made between the concrete number and the concept of number, between pure mathematics and applied mathematics. I point out an equidistance, a lack of dependence between the conception of the cardinal number and the real number. I highlight the equivalence of Cantor's, Dedekind's and the decimal construction of the real number. Within the real number body, addition (+) is an unfounded, vicious concept, and the concept of total order on the real number manifold cannot be sustained. The concept of actual infinity, countability, Cantor's diagonal construction is criticized. Cantor avoids the concept of actual infinity and demonstrates a possibility thrown at infinity which is not an actuality. Mathematics is limited by its symbols, mathematics describes and does not represent.

Keywords: real number, cardinal number, rule, actual infinity, generality, mathematical symbol, mathematical process.

1. RAPORTUL DINTRE MATEMATICA PURĂ (BAZATĂ PE FORME GENERALE) ŞI MATEMATICA APLICATĂ

Spaţiul gramatical al numerelor în genere, cuprinzând şi pe cele reale, este edificat de către Wittgenstein în *Philosophical Grammar*[1], *Philosophical Remarks*[2] şi continuă în *Remarks on the Foundation of Mathematics*[3] cu aprofundarea discuţiei asupra numerelor iraţionale, critica procedeului diagonal a lui Cantor, a teoriei tăieturilor a lui Dedekind, criticile aferente asupra fundamentelor matematicii ş.a. Filosoful vienez sugerează că nu există o „poveste” a numerelor, aşa încât să fim uimiţi de ceea ce va urma, ci uimirea produsă de o regulă de construcţie a numerelor provine din ceea ce nu ne încăpea în minte, din faptul că nu poţi avea imediat sub privire o totalitate infinită; chiar cerinţa de a fi *infinită* e un subterfugiu al limbajului matematic, folosit de cele mai multe ori într-un mod obscur. Imaginea despre numerele reale, ca și cea despre numerele cardinale, pleacă de la conceptul de regulă. O regulă avem peste tot unde se află o variabilă şi aceasta ne aminteşte de *conceptul formal* din *Tractatus Logico-Philosophicus*[4] şi *forma generală a numărului* care rămâne ca punct de continuitate în filosofia wittgensteiniană a matematicii. În cazul numerelor de alt tip decât cele cardinale, regula lor de generare se „complică”; de fapt, ea nu are altă natură decât cea *crescută*, mai exact, *înfăşurată* în jurul lui „+1” sau „şi aşa mai departe” (*and so on*). Cu acest salt, de la „+1” la orice *altă operaţie matematică*, consider că are loc o generalizare a tipurilor de operaţii, dar nu mai este nici pe departe una logicistă, ci alta, matematico-gramaticală. În mod tacit, se admite discuţia în jurul unui „concept general de număr”, însă discuţia de profunzime se axează pe posibilitatea de a urma o regulă.

În PG şi PR, Wittgenstein caută să extindă conceptul de număr, de la cel cardinal exprimat sub formă generală, la cel raţional şi real. Regula generală este una de utilizare a variabilelor (ξ, în notaţia consacrată deja) pentru care se instituie o regulă de utilizare, care presupune acelaşi tip de variabilă. Acest procedeu (să îl numim cvasigeneral) e preferat celui care implică definiţii (care „mai devreme sau mai târziu se sfârşesc”[5]) şi se bazează pe reguli de semne pentru care se folosesc notaţii consacrate, cum sunt ridicarea la putere, extragerea radicalului etc.

---

[1] Wittgenstein, *Philosophical Grammar* (PG), editor. Rush Rhees, trad. Anthony Kenny, Basil Blackwell, 2004.

[2] Wittgenstein, *Philosophical Remarks* (PR), editor. R. Rhees, trad. Raymond Hargreaves şi Roger White, Basil Blackwell, Oxford, 1998.

[3] Wittgenstein, *Remarks of the Foundations of Mathematics* (RFM), editor. G.H. von Wright, R. Rhees și G.E.M. Anscombe, trad. G.E.M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford, (1956) 1998, Part. I, Anexa II.

[4] Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (TLP), traducere, cuvânt introductiv şi note de Alexandru Surdu, Edit. Humanitas, 1991; în engleză, *Tractatus Logico-Philosophicus*, trad. D.F. Pears şi B.F. Mc. Guiness, London, Routledge, 1961.

[5] PG, Part. II, II, 10, p. 280.

În felul în care își exprimă meditațiile referitoare la folosirea de simboluri și reguli de semne, Wittgenstein pare să se declare excedat de faptul că apelează în mod tacit la forma generală a numărului, la semne pentru entități care nu semnifică niciun proces, ci, poate, cel mult, trimit la o practică matematică: „Dar ce face ca un semn să fie o expresie a infinitului? Ce dă caracterul ciudat a ceea ce numim noi infinit? Cred că este ca și cazul unui semn pentru un număr enorm. Deoarece, caracteristica infinitului, concepută în acest mod, este mărimea lui imensă. Dar nu este nimic care să fie o enumerare și totuși să nu fie o enumerare; o generalizare care enumeră într-un mod neclar fără să enumere în mod real sau enumerând până la o limită determinată."[6]

Singurul lucru care prezintă încredere este o regulă care poate fi aplicată în practică. Dacă aici rămâne într-un fel ambiguitatea asupra a ce anume este o regulă, Wittgenstein găsește mereu prilejuri de a ne arăta ce înseamnă aceasta.

Ideea este că putem să urmăm o regulă de construcție, fără a scrie (sau a fi capabili să scriem) seria care rezultă. Wittgenstein nu lucrează cu artificii, ci cu bariere, limite, granițe. Așa sunt afirmațiile și propozițiile matematicii în domeniul aparte al gândirii pe care filosoful caută să-l scoată la lumină precum Socrate cunoștințele de matematică ale interlocutorului.

Întrebările lui sunt metafizice și dechise, nu conduc la răspunsuri sau opțiuni, ci sunt mai degrabă de sorginte inițiatică. „Fă asta și înțelege limitele", ne spune filosoful. Altfel cum să receptezi faptul că niște semne, precum „1+1+1+1…" sau „1, ξ, $\sqrt{(\xi + 3)5}$", sau „a, ξ, ξ+1" ne pot face să urmăm o regulă în care partea importantă rezidă în „puncte-puncte" sau în „înlocuiește în continuare variabila ξ cu numere particulare"?

„Asta înseamnă că expresia «și așa mai departe» nu conține o putere secretă prin care seria să fie continuată fără să fie continuată.

Desigur nu îl conține pe *acela*, vei spune, dar totuși conține înțelesul continuării infinite.

Dar am putea întreba: cum se întâmplă că cineva care acum aplică regula generală unui număr mai mare să urmeze în continuare *această* regulă?"[7]

Două idei se desprind din perspectiva lui Wittgenstein asupra schemei generale a unei reguli care se aplică unor semne:

– posibilitatea regulii ascunde realitatea (existența), deoarece o regulă simbolică nu reprezintă un proces matematic desfășurat în totalitate, care „să ne stea în fața ochilor";

– posibilitatea regulii implică negarea existenței unor alte simboluri: mai exact, posibilitatea alegerii, discernerii lor, din faptul că nu orice semne pot să apară atunci când urmăm o regulă.

[6] PG, Part. II, II, 10, p. 280.
[7] PG, Part. II, II, 10, p. 282.

Schematic, o regulă aplicată unor semne implică un proces matematic:

(I) Regulă de Semne → (II) Proces matematic (cum ar fi numărarea).

Între semnul generalităţii semnificat de (I) şi procesul matematic semnificat de (II), nu există al treilea termen, arată Wittgenstein.

„Nu este un al treilea lucru între enumerarea particulară şi semnul general.

Desigur numerele naturale au fost scrise doar până la un anume cel mai înalt punct, să zicem 10^{10}. Acum, ce constituie posibilitatea scrierii numerelor care nu au fost încă scrise? Cât de ciudat este acest sentiment că ele sunt deja, aparţin existenţei! (Frege a spus că înainte ca o construcţie de linii să fie desenată, într-un anume sens ea era deja acolo.)”[8]

Absenţa trecerii de la regulă la fenomenul concret matematic, Wittgenstein o resimte ca pe un gol metafizic, ca pe un „abis între numere şi propoziţia generală”. În plus, acele „puncte-puncte”, „.....” sau „and so on”, esenţial pentru calcul şi care dă sensul de regulă generală unui şir, e o regulă care apare în cadrul lui *and so on*, and so on! Aşadar, e vorba de gramatica expresiei ca atare, fiindcă de exemplu, 1, 1+1 and so on... = 1, 1+1, 1+1+1 and so on, *and so on*.

Revine în sarcina gramaticii lui „and so on” să ne elibereze de teama de a o folosi într-un mod care să transcendă finitul; şi atunci regula generală se transformă într-o problemă de limbaj, matematicul se mută în Spaţiul Gramatical.

Cu aceasta, Wittgenstein mai descoperă o distincţie gramaticală „oricât de ciudat ar suna”: e vorba de cea dintre „numerale” (numele de numere care au fost deja scrise conform regulii) şi „numerele care urmează”!, adică cele care nu vor fi scrise niciodată în cadrul aceleiaşi reguli.

Jocul deschis între posibil şi real, arbitrar şi esenţial se completează cu diverse imagini şi exemple de tip reprezentaţionist.

„Ca ce anume *vedem* 1, 1+1, 1+1+1...? Aici este o formă **inexactă** (s.n.) de exprimare. Punctele sunt ca nişte numerale suplimentare vizibile în mod indisctinct. Este ca şi cum ne-am oprit din scrierea numeralelor, pentru că la urma-urmei, nu le putem scrie pe toate, dar ele sunt acolo ca într-un fel de cutie. E ca şi cum aş cânta numai primele note dintr-o melodie, făcând numai o aluzie la ce urmează şi o las să se estompeze în neant. (Sau ca şi cum aş scrie doar primele litere dintr-un cuvânt distinct şi restul le-aş lăsa ca o linie inarticulată.) *În fiecare din aceste cazuri, indistinctul are un distinct* (cartezian vorbind, n.n.) *care îi corespunde*.”[9]

Astfel, nu e vorba pur şi simplu că un număr cardinal este ceea ce rezultă din 1 prin continuarea adunării cu 1, ci de o ritmicitate, o regularitate care nu e „nebuloasă” şi în care nu se pot strecura confuzii (să numărăm din doi în doi, de pildă).

Aşadar, încărcătura lui „and so on” cade pe regula care trebuie urmată şi nu pe aceea a unui substitut pentru o serie de numerale care nu poate fi scrisă, ci se

[8] PG, Part. II, II, 10, p. 281.
[9] PG, Part. II, II, 10, p. 285.

sugerează în continuare. Iată o altă perspectivă care schimbă modul de a privi obişnuit: această perspectivă este una tipic reprezentaţionistă, noutatea şi originalitatea care punctează filosofia wittgensteiniană a matematicii.

Wittgenstein este acum în măsură să precizeze legătura dintre număr şi conceptul de număr, explicând de fapt raportul dintre matematica pură şi matematica aplicată. Ideea de bază rămâne că nu e necesar să coexiste conceptul de număr cu numerele ca atare. Dacă în TLP, forma generală a numărului se desprindea din numerele particulare, acum independenţa consistă în faptul că putem avea un calcul cu numerale, fără să fie nevoie ca ele să fie guvernate de forma generală a variabilei de număr.

Regulile după care operăm cu numerele particulare se evidenţiază fie prin „linii" care se adună sau reguli mecanice aritmetice (inclusiv de tipul „abacului rusesc"), care, dacă nu sunt valide (fiindcă nu acced la o formă generală), sunt cel puţin utilizabile (aşa cum ne folosim de unele scheme sau desene).

Teoremele privitoare la numere particulare care se exprimă în calcule aritmetice nu pot fi „complete" decât dacă conţin teoremele generale despre numere cardinale, ecuaţii generale de tipul asociativităţii operaţiei de adunare şi alte tipuri de reguli generale. Şi aici Wittgenstein exprimă fenomenele şi procesele matematicii într-un stil propriu: regulile generale se cuprind la modul intensional în reguli aplicate în cazuri particulare; regulile generale nu sunt niciodată total exprimabile, vizibile, decât prin cele particulare, iar cele particulare nu pot fi complete decât bazându-se pe regulile generale, care, în mod practic, prin structura lor matematico-gramaticală adaugă calculului numeric ceva în plus[10]; reguli de tip general sunt cele, cum am arătat[11], de forma $a+(b+c)=(a+b)+c$; dar şi calcule de tot felul care pot fi imaginate prin restricţii sau reguli oarecare, cum ar fi $1/3 = 0.\dot{3}$, care aparţine unui tip de calcul şi $1/3 = 0.(3)$ care este un alt calcul.

Wittgenstein în acest moment e în măsură să îşi pună o întrebare care nu îşi afla locul în TLP: care este importanţa conceptului numărului cardinal? Este acesta indispensabil definirii celorlalte tipuri de numere?

Răspunsul e negativ: nu există niciun determinism sau un traseu privilegiat în favoarea numărului cardinal. Cum vorbesc despre o regulă generală de tip $(1, \xi, \xi+1)$, la fel pot discuta despre o regulă generală de forma $(5, \xi\sqrt{\xi})$; cel puţin aceasta lasă să se înţeleagă filosoful:

„Întrebarea care de asemenea se ridică: unde este conceptul de număr (sau al numărului cardinal) indispensabil? Număr, în constrast cu ce? $(1, \xi, \xi+1)$ poate, în contrast cu $(5, \xi\sqrt{\xi})$ etc. – Pentru că dacă chiar introduc un semn aşa ca $(1, \xi, \xi+1)$ şi nu îl luăm ca pe un lux, atunci trebuie să fac ceva cu el, i.e. să îl folosesc într-un

[10] Cf. PG, p. 286.

[11] A se vedea Iulian Grigoriu, „Generalitate și inducție în filosofia wittgensteiniană a matematicii", în *Probleme de Logică*, București, Edit. Academiei Române, 2020, pp. 113–134.

calcul, şi apoi îşi pierde splendoarea solitară şi apare într-un sistem de semne coordonate cu el."[12]

Distincţia dintre numărul cardinal şi cel real se face între reguli ale unor jocuri (de limbaj matematic) apropiate. Diferenţa, contrastul dintre „numărul cardinal" şi „numărul real", este una între reguli, nimic altceva. În filosofia wittgensteiniană a matematicii, fundamentele matematicii care tot pregătesc terenul pentru dezvoltarea tipurilor de numere, cu tot ambalajul axiomatic şi teoretic, se năruie sub forţa evidenţei: ne înşelăm dacă credem că expresiile „numerele cardinale", „numerele reale" ar ascunde o diferenţă calitativă, ontologică, tipuri de infiniţi, numărabilitate şi teoreme cu demonstraţii care le modelează şi le certifică.

Nu poţi spune „toate numerele cardinale", la fel cum nu se poate utiliza expresia „toate numerele reale", ci numai folosi, specifica, numere particulare. Diferenţele dintre regulile care trimit la numere cardinale şi reguli privind numere reale se află pe acelaşi palier.

Teoremele lui Cantor sunt absurde.

„Spunem numărul numerelor cardinale este mai mic decât numărul numerelor reale şi ne imaginăm că am putea să scriem două serii una lângă alta... şi atunci o serie va merge până la infinit, în timp ce cealaltă se va opri undeva într-un infinit real. Dar asta este un nonsens. Dacă putem vorbi despre o relaţie care poate fi numită prin analogie «mai mare» şi «mai mic», ea poate fi o relaţie între formele «număr cardinal» şi «număr real». Învăţ ce este o serie având-o explicată şi doar extinzând ceea ce îmi este deja explicat. O serie finită este explicată mie prin exemple de tipul 1, 2, 3, 4, şi una infinită prin semnele «1,2,3,4 şi aşa mai departe» sau «1,2,3,4... »"[13]

2. SITUAŢIA MATEMATICĂ A NUMERELOR REALE. CELE TREI CONSTRUCŢII: DEDEKIND, CANTOR ŞI SISTEMUL ZECIMAL

Înainte de a arăta motivele şi criticile cele mai importante ale lui Wittgenstein asupra fundamentelor numerelor reale, voi prezenta pe scurt acest sistem, aşa cum se desprinde din perspectiva unei abordări extensionaliste, teoria clasică a mulţimilor, teoriile lui Cantor şi Dedekind, perspective de altfel devenite un bun comun al analizei matematice. Trebuie reţinut că majoritatea termenilor matematici astfel consacraţi (cum ar fi infinit, majorant, supremum, demonstraţie prin inducţie, distanţa dintre numere etc.) sunt criticate pas cu pas şi în amănunţime de

[12] PG, p. 286.
[13] PG, Part II, II, 10, p. 287.

Wittgenstein şi detronate din poziţia lor privilegiată, măcar din perspectiva percepţiei legilor numerelor reale care, după filosoful austriac, ne scapă în mare măsură.

Este adevărat că Wittgenstein nu este interesat de structura numerelor reale construite ca nişte structuri algebrice:

I) $(R,+,\cdot)$ este un corp comutativ, dotat cu două operaţii, una numită adunare „+" şi alta înmulţire „·", şi care verifică nişte proprietăţi, conform cărora, $(R, +, 0)$ formează un grup comutativ, la fel şi $(R - \{0\}, \cdot, 1)$; de asemenea, şi adunarea este distributivă faţă de înmulţire.

II) Mulţimea R este total ordonată, adică între orice două numere a şi b, relaţia $a \leq b$ este sau adevărată, sau falsă.

III) Pentru orice mulţime $M \subset R$ există un număr notat supM (intuitiv, supremum de M, un număr mai mare decât orice număr al mulţimii date) şi care aparţine mulţimii R.

Faptul că $N \subset R$, $Z \subset R$, $Q \subset R$, bazat pe conceptul de funcţie (injectivă), va fi contestat de Wittgenstein.

Modul în care se operează cu infinitul, iarăşi va constitui un motiv întemeiat de critică. Faptul că matematicienii se grăbesc să contruiască un sistem numai de dragul funcţionării lui îl irită în mod deosebit pe Wittgenstein. Operaţiile elementare cu mulţimi sau cele care implică diverse tipuri de numere reale vor fi motive de critică.

Să considerăm sistemul numerelor reale, aşa cum e conceput el astăzi de către analiza matematică (pe baza teoriilor unor Cantor, Dedekind, Abel şi alţii).

Cele trei axiome definitorii sunt cu totul convenţionale: nu „ştim" ce este adunarea. Cum am arătat[14], ea se bazează pe procedeul de inducţie (care presupune la rândul său operaţia de adunare). Distributivitatea adunării faţă de înmulţire iarăşi ar presupune o demonstraţie recursivă, care nu poate decât să îl nemulţumească pe Wittgenstein, din motive arătate pe larg.

Să acceptăm atunci că $(R, +, 0)$ formează un grup abelian? Probabil că însuşi faptul că ceea ce premerge accesul la o astfel de structură este deja „putred", îl face pe filosof să nu mai aibă încredere în structuri algebrice abstracte. Matematicienii construiesc convenţii. Noi îi urmăm din inerţie, nu ne mai punem întrebări.

În al doilea rând, relaţia de ordine totală din R, „moştenită" de la numerele naturale, presupune iarăşi existenţa unui număr straniu, precum 0, în jurul căruia totul se învârte, precum aţa pe un mosor. Dar a compara acum două numere reale, ceea ce revine la a compara două „legi", aşa cum se va exprima Wittgenstein, nu face decât să devină... impietate. Două numere reale pot fi identice până la infinit, ne va spune (cu alte cuvinte) Wittgenstein. Şi atunci cum să le compari?

Şi a treia axiomă care fundamentează „teoria modernă" a numerelor reale, care are pretenţia unor rezultate mai profunde, specifice mulţimii R (pentru orice

[14] A se vedea Iulian Grigoriu, „Generalitate și inducție în filosofia wittgensteiniană a matematicii", pp. 113–134.

mulţime M inclusă în R, există un supremum, supM real[15]), nu este decât un rezultat amorf[16]: atâta timp cât „axa” numerelor reale nu e alcătuită din puncte, iar un „punct” nu e unul oarecare între alte puncte, ci de fapt unul care se deplasează, aşadar, ca să spui $\exists x \varphi x$, ar fi ca şi cum ai lua în considerare toate punctele submulţimii majorate M. Şi atunci cum se poate vorbi despre supremumul unei mulţimi?

Mai mult de atât, în timpul edificării structurii R, matematicienii şi filosofii şi-au pus diverse probleme[17]:

– este sistemul de axiome care construieşte mulţimea R necontradictoriu?

– există efectiv o mulţime R determinată de axiomele de mai sus?

– sistemul numerelor reale este unic?

Exigenţele ridicate sunt de tip logic (poate să apară în R o propoziţie, precum și negația sa, și să fie ambele adevărate?). Cei care s-au dedicat fundamentării sistemelor de numere au arătat că necontradicţia lui R decurge din cea a lui N. Dar Gödel demonstrează că nu se poate arăta necontradicţia lui N fără a recurge la entităţi din afara sa.

Cei mai mulţi matematicieni răspund la a doua chestiune legată de existenţa unei mulţimi ca R, făcând apel la practica matematică. Aici, se poate considera că Wittgenstein răspunde invers: am ajuns din practică să operăm cu nişte numere numite numere reale. Dar felul în care matematicienii şi filosofii caută acum să le fundamenteze este cu totul inutil, în plus, ei se împiedică în aceste fundamente care, când sunt, când nu sunt contradictorii.

Greşeala lor e una funciară, numerele reale nu au nevoie de vreo fundamentare, practica şi contrucţia lor e de ajuns.

Dar iată cele trei construcţii de sisteme de numere reale, toate plecând de la mulţimea numerelor raţionale, Q:

1. Construcţia lui Dedekind pe bază de tăieturi, ca şi celelalte două, caută să „densifice” mulţimea numerelor raţionale Q, construind o mulţime mai „generoasă”, care să o conţină şi care va fi R (cea care verifică cele trei condiţii definitorii expuse mai sus).

Ideea lui Dedekind este simplă: pentru un număr $b \in Q$ dat, o tăietură în Q este orice mulţime T (care nu are cel mai mic element, deci „vine de la minus infinit”) şi conţine toate numerele posibile raţionale mai mici decât el. Mai greu e de scris acest lucru sub această formulare; de aceea, spunem că deîndată ce un număr raţional q este mai mare decât t, atunci $q \in T$.

[15] Numită axioma Cantor-Dedekind.

[16] Cum se exprimă filosoful Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Remarks* (PR), ed. R. Rhees, trad. Raymond Hargreaves şi Roger White, Basil Blackwell, Oxford, 1998, IX, §110, p. 173, dar şi în alte locuri.

[17] Cf. Octavian Stănăşilă, *Analiză Matematică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1981, p. 47.

Mai riguros, definim o tăietură în Q, submulţimea T pentru care, dacă t∈T, şi q>t, q raţional, atunci q∈T;

Toate tăieturile lui Q să le notăm cu R_D: Mulţimea numerelor raţionale Q va fi inclusă în R_D, deoarece orice număr raţional se poate scrie ca o tăietură; în plus, se definesc: suma între tăieturi, numărul zero (0= T(0) = toate numerele raţionale mai mari ca zero {q∈Q, q>0} relaţia de inegalitate între submulţimi incluse, înmulţirea dintre A şi B şi astfel a fost construit sistemul R_D al numerelor reale pe bază de tăieturi.

2. Cantor construieşte mulţimea numerelor reale prin „completarea" numerelor raţionale cu nişte numere care nu sunt raţionale, prin metoda diagonalei, pe care o voi expune imediat.

În limbaj de teoria mulţimilor şi teoria şirurilor, un număr real va deveni limita unui şir de numere raţionale; numerele raţionale se organizează în felul următor: un şir „fundamental" de numere raţionale a_n este fundamental dacă pentru orice ξ>0 raţional, există un număr natural N depinzând de ξ astfel încât $[a_n$ - $a_m] < ξ$, oricare a fi m şi n ≥ N(ξ).

Acest ξ este un număr „miraculos", deoarece el poate fi făcut oricât de mic, după necesităţi, aşa încât rămâne „mai mic" decât orice număr cu care se compară (devenind un adevărat „cleşte" pentru diferenţa dintre cele două şiruri de ranguri, m şi n ale şirului a_n, şi rămânând mereu pozitiv ξ>0). Iată cum un concept poate la fel de important ca şi „0" sau „1", pentru mulţimea numerelor reale.

În fine, în limbaj de teoria mulţimilor, în mulţimea şirurilor fundamentale de numere raţionale, două şiruri, a_n şi b_n, sunt echivalente, dacă ∀ ξ>0, ∃N, număr natural depinzând de ξ, aşa încât $[a_n$ - $b_n] < ξ$, ∀ n≥ N(ξ).

Mulţimea claselor de echivalenţă a şirurilor fundamentale este mulţimea R a numerelor reale, care verifică iarăşi axiomele date.

3. Construcţia zecimală a numerelor reale constă dintr-o mulţime de şiruri infinite de cifre (zecimale) notate astfel: $a_1 a_2 a_3$.....$a_{100} a_{101}$... „şi aşa mai departe", printre care pot exista oricâte cifre de 0, în număr finit, dar nu pot exista şiruri de forma $a_1 a_2 a_3$..... a_{100}9999..., caz în care numărul zecimal se scrie $a_1 a_2 a_3$.....(a_{100}+1). În această mulţime se definesc numerele zecimale pozitive, negative, numărul zero (ca intersecţie a lor) suma, diferenţa, supremumul, scrierea prin trunchieri şi perioade, înmulţirea, care respectă sistemul iniţial de axiome, astfel încât avem o nouă construcţie sintactică a numerelor reale, R (un limbaj cu 11 semne – 10 cifre zecimale şi o virgulă care prin convenţie se scrie după prima cifră a şirului, care se va îmbogăţi cu concepte semantice – suma seriei, convergenţă etc.) şi e construcţia cea mai folosită din toate cele expuse.

Aşa cum arată Octavian Stănăşilă, cele trei sisteme constituie de fapt unul şi acelaşi, fiind vorba de fapt de „o unicitate până la izomorfism":

„Se poate demonstra următoarea teoremă: dacă R şi R' sunt două sisteme de numere reale, atunci există o aplicaţie bijectivă Φ: R → R', astfel încât Φ(0) = 0,

$\Phi(1) = 1$, $\Phi(x+y) = \Phi(x)\cdot\Phi(y)$, pentru orice x, $y\in R$ şi în plus, dacă $x\leq y$ în R, atunci $\Phi(x) \leq \Phi(y)$. Aşadar, din punctul de vedere al utilizării operaţiilor algebrice, inegalităţilor şi proprietăţilor care decurg din axiome..., mulţimile R, R' se pot identifica; orice calcul efectuat în R se transferă în R' prin aplicaţia Φ şi reciproc, orice calcul făcut în R' se transferă în R prin Φ^{-1}... R şi R' sunt corpuri total izomorfe."[18]

La fel sunt şi cele trei construcţii: a lui Dedekind, a lui Cantor şi cea zecimală.

Pentru a completa şirul de construcţii şi demonstraţii care fac obiectul principal al criticilor lui Wittgenstein referitor la ceea ce matematicienii consideră a fi un „infinit actual" (care include un alt „infinit actual"), dar şi conceptele de „numărabilitate" şi „nenumărabilitate", expun pe scurt[19] demonstraţiile că mulţimea numerelor raţionale (şi algebrice) este numărabilă, precum şi demonstraţia de nenumărabilitate a numerelor reale, prin procedeul diagonal.

Cantor consideră că două mulţimi între care se poate stabili o corepondenţă bijectivă au aceeaşi „putere". Astfel, orice mulţime „indexată" după mulţimea numerelor naturale este numărabilă: şirul 1 2 3 4 5 6 7 8 9... n ... (evident numărabil, prin funcţia identică f(k) = k, este „la fel" cu 2 4 6 8 10 ....2n ... chiar dacă, a doua mulţime este parte a primeia. Acest aspect îi va da curaj lui Cantor să stabilescă împotriva concepţiilor curente asupra infinitului că o „parte", precum un interval de numere reale, va avea acelaşi ordin sau putere cu întreaga mulţime a numerelor reale.

După Wittgenstein[20], regulile sistemului zecimal, prin faptul că nu limitează semnele numerice (spre stânga sau dreapta), lasă liberă exprimarea infinitului.

„Poate am putea spune: fie, dar semnele numerice sunt totuşi limitate de folosire, materialul necesar pentru scriere şi alte circumstanţe. Fără îndoială, dar aceasta nu se exprimă în regulile folosirii lor, ci sensul lor este formulat numai în reguli. Relaţia m=2n stabileşte o corelaţie a clasei tuturor numerelor cu una din subclasele sale? Nu! Ea stabileşte o corelaţie a oricărui număr arbitrar cu altul şi în acest mod obţinem perechi de clase infinit numeroase, unde o clasă este corelată cu o alta, dar ele nu sunt în niciun caz într-o relaţie ca dintr-o mulţime cu o submulţime. Chiar acest proces infinit este el însuşi, într-un sens, o asemenea pereche de clase. În această superstiţie că m=2n stabileşte o corelaţie între o clasă şi subclasa sa, nu avem de-a face din nou decât cu o ambiguitate a gramaticii. Şi cu siguranţă totul ţine de sintaxa realităţii şi a posibilităţii. m=2n conţine *posibilitatea de a stabili o corelaţie a oricărui număr* cu un altul, dar *nu stabileşte corelaţii între toate numerele cu celelalte*."[21]

---

[18] Octavian Stănăşilă, *op. cit.* pp. 57–58.
[19] Cf. Oscar Becker, *Fundamentele matematicii*, Bucureşti, Edit. Ştiinţifică, 1968, pp. 308 sqq.
[20] PR, XII, 141.
[21] PR, XII, 141.

Iată o observaţie în stil wittgensteinian care e de ajuns să bulverseze faptul că o relaţie funcţională de biunivocitate conchide şi identitatea profundă a două construcţii matematice. Cantor nu poate susţine o corelaţie efectivă, ci o posibilitate, dar care nu e niciodată manifestă. Aşadar, să nu eludăm conceptul de infinit actual în stilul în care Cantor o face. Observaţia lui subtilă (că o mulţime inclusă în alta este la infinit „egală” cu ea) într-adevăr nu conduce la ceea ce şi-a propus, adică nu avem de a face cu mulţimi de aceeaşi putere. Tot edificiul creat pe fundamentele teoriei mulţimilor este superfluu. Wittgenstein caracterizează drept „falacios” termenul de *posibilitate*, deoarece el susține că, într-o bună zi, ceea ce este posibil va deveni manifest. Dar nu e cazul, cu atât mai mult în situaţia inifinitului. Aşadar, în matematică, nu se acceptă ca posibilitatea să devină realitate.

„«m=2n este un cursor de-a lungul seriei de numere» şi observaţia că distanţa dintre elementele puse în aşa numita corespondenţă nu este una determinată, arată că «ceva» nedefinit, ne-riguros, o ambiguite nematematică, «gramaticală» se strecoară în lucrurile aşezate în ordine monotonă care devin o «superstiție»; nu e o *realitate* că avem de a face cu o corespondenţă între o mulţime şi o submulţime a sa. Aceasta, în fond, nu se realizează niciodată, ca să spunem că şi submulţimea este inclusă în mulţimea iniţială, şi că cele două au acelaşi ordin.

De vină este concepţia extensivă care se pliază pe un fel de percepţie: numai dintr-un astfel de motiv, se crede că undeva, în esenţă, «toți n trebuie să aibă sau nu această proprietate, chiar dacă nu pot să ştiu asta».”[22]

Cantor interpretează astfel teoria tăieturilor a lui Dedekind: „Forma definiţiei dlui Dedekind se bazează pe *totalitatea tuturor* numerelor raţionale, acesta fiind împărţită în două grupe, astfel dacă notăm numerele primei grupe cu A_ν, numerele celei de-a doua grupe cu B_μ, avem totdeauna $A_\nu < B_\mu$; dl. Dedekind numeşte o astfel de împărţire a numerelor raţionale «tăietura» mulţimii, o notează cu (A_ν/B_μ) şi îi asociază un număr b”[23].

Wittgenstein cunoaște aceste discuţii şi ripostează astfel: „În explicaţia pe care o dă Dedekind conceptului de infinit, greşeala (cercul vicios) constă în a aplica

---

[22] PR, XII, 130.

[23] Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (*Bazele unei teorii generale a mulţimilor)*, Leipzig, B. G. Teubner, 1883, cap. 9. Tot aici Cantor trece în revistă „trei forme principale de introducere aritmetică riguroasă a numerelor reale generale”... care sunt: „mai întâi metoda de introducere folosită de dl. prof. Weierstrass de mulţi ani în prelegerile sale asupra funcţiilor analitice...; în al doilea rând, dl. R. Dedekind a publicat o formă proprie a definiţiei în scrierea sa *Stetigkeit und irrationale Zahlen (Continuitatea şi numerele iraţionale),* Braunschweig, 1872 şi în al treilea rând, eu am dat în anul 1871 (Math. Ann., vol. V, p.123) o formă de definiție care în exterior are o anumită asemănare cu aceea a lui Weierstrass...; după părerea mea, această a treia formă a definiţiei, dezvoltată mai târziu şi de dl. Lipschitz (*Bazele analizei*, Bonn, 1877), este cea mai simplă şi cea mai naturală dintre toate....”, iar Cantor subliniază faptul că în definiţia unui număr real raţional, intervine întotdeauna o mulţime de ordinul întâi de numere raţionale, ca loc comun al tuturor celor trei definiţii avute în vedere, „deosebirea dintre ele constând în momentul generării prin care se asociază mulţimea cu numărul (real, n.n) definit prin ea, precum şi în condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească mulţimea ca să se poată adopta ca bază pentru definiţia numărului respectiv”.

conceptul «toţi» implicaţiei formale care, dacă putem spune, îşi păstrează valoarea independent de faptul că un număr finit sau infinit de obiecte este inclus în conceptele despre care vorbeşte. Ea spune pe scurt: dacă se aplică unui obiect, se aplică tuturor.

Ea nu ia în considerare deloc totalitatea obiectelor, ci doar spune ceva despre obiect la momentul de faţă, şi *aplicarea ei* este finită sau infinită, după caz.

Dar cum putem noi să ştim o astfel de propoziţie? – Cum se verifică ea? Ceea ce în realitate corespunde cu ceea ce avem în minte, nu e deloc o propoziţie, ci inferenţa de la φx la ψx, când această inferenţă este permisă – dar asta nu e exprimată printr-o propoziţie."[24]

Cu alte cuvinte, împărţirea lui Dedekind a tuturor numerelor raţionale la stânga sau la drepta unui număr abstract b nu poate să se aplice tuturor numerelor, ci numai celor la care se aplică, cele avute în vedere *acum*. E vorba de o comparaţie între toate numerele raţionale cu un „reper", sau de o inferenţă, dar care trebuie să se aplice la modul finit sau infinit, dacă e cazul. Or, această totalitate poate fi „parcursă" mental, dar nu şi marterial, aşadar poate să nu fie exprimată printr-o propoziţie cu sens matematic, adică pot să „rămân" cu numere raţionale care nu se plasează nici la stânga, nici la dreapta tăieturii.

Wittgenstein protestează de asemenea asupra reprezentării zecimale a numărului real, în cele mai multe din panseurile sale filosofico-matematice. Din punct de vedere gramatical, o linie nu se poate prelungi „indefinit", căci acesta e un caz de „şi-aşa-mai-departe" cu totul diferit de inducţia matematică. Fenomenul geometric nu mai e justificabil pas cu pas şi nici nu se impune că ar fi dublat de un proces de numărare.

Reprezentarea zecimală presupune o divizibilitate la infinit care presupune iarăşi că am putea concepe „orice" număr de părţi; dar o „împărţire infinită" poate fi concepută? Într-un stil intensional, Wittgenstein surprinde divizibilitatea ca „variabilă", adică încercând să şi-o explice, o transformă în cadrul Spaţiului Gramatical Matematic într-un concept, în cadrul căruia „variabila divizibilitate... *nu opune nici o limită* divizibilităţii reale; şi în asta constă caracterul ei infinit"[25].

În acelaşi timp, filosoful contestă faptul că „orice" diviziune ar putea fi concepută, fiindcă aceasta nu există. E mai aproape aici Wittgenstein de o interpretare pozitivă a unui număr dinamic, cum ar fi celebrul ξ, care e astfel gândit, postulat (nu construit) aşa încât să se plieze pe orice proces matematic care impune o asimilare a unei identităţi prin compararea unei diferenţe cu ξ. Dacă diferenţa dintre a şi b este mai mică decât orice ξ pozitiv, oricât de mic, atunci a=b.

Termenii de teoria mulţimilor au contaminat, au corupt cu totul înţelegerea corectă a fenomenelor matematicii. Simbolismul teoriei mulţimilor este unul

[24] PR, XII, 130.
[25] Cf. PR, XII, 139.

corupt, pernicios, fictiv şi de nonsens, care se insinuează în locul celui care ar trebui să fie (şi e singurul posibil)[26].

Un număr real este o lege, indiferent cum îl reprezentăm (într-un mod contingent, ca „punct” pe o dreaptă, sau ca fracţie zecimală, ca limită etc).

Pledoaria lui Wittgenstein e convingătoare că ne facem imagini şi reprezentări greşite despre numerele reale. Ceea ce ne invită el, este să ne reprezentăm corect numărul consacrat ca „număr real”.

Punctul de intersecţie a două linii nu e termenul comun a două clase de puncte, ci punctul de întâlnire a două legi[27].

Exemplele pe care le consacră, cele legate de $\sqrt{2}$ şi de π, nu sunt decât exemplificări pe care le dă: $\sqrt{2}$ e dat ca exemplu pentru orice număr iraţional algebric, π, pentru orice număr transcendental.

Pentru Wittgenstein, ele sunt ficţiuni, prilejuri de a filosofa, nebuloase pentru cei care cred că le-au desluşit sensul. Nicio construcţie a lor nu le oferă un loc aparte, cel mult arată că nu sunt numere raţionale. Se prezintă aceste numere ca fiind aparte faţă de numerele raţionale, se detaşează ele din mijlocul lor?

Ce arată o construcţie ca aceea a punctului $\sqrt{2}$? Arată ea acest punct? Şi cum ajunge totuşi să ia loc printre toate numerele raţionale? Ea arată pur şi simplu că punctul *obţinut* graţie construcţiei *nu* este raţional.

În aritmetică ce corespunde acestei construcţii şi acestui punct? Ar fi acesta un număr care, în ciuda a toate, ajunge să-şi facă un loc în mijlocul tuturor numerelor raţionale? E o lege, care nu e o lege, care vorbeşte despre natura numărului raţional.

Explicaţia tăieturii după Dedekind arată ca şi cum ar fi problema intuiţiei, atâta timp cât zice: nu sunt decât trei cazuri: sau R are un ultim termen şi L are unul prim, sau... etc. În realitate, niciunul dintre aceste cazuri nu se lasă gândit sau reprezentat[28].

Wittgenstein insistă că teoria mulţimilor caută să surpindă infinitul actual prin intermediul simbolismului matematic (adică, la un nivel mai general decât teoria regulilor pe care mizează filosoful), ceea ce nu se poate realiza. Simbolismul e limitat şi deci matematica în accepţiunea termenului este ca atare. Ea descrie şi nu reprezintă. De aceea, consider că reprezentaţionismul wittgensteinian se opune ferm descriptivismului şi analiticităţii matematicii care doar discută despre structuri, fără să le poată reproduce, pe când filosoful propune în locul descrierii, o teorie a regulilor (intensionalism). Prin urmare, matematica (cea criticată de Wittgenstein) doar „ambalează conceptele”, proces în care formele sale dispar. Iar „formele nu pot fi descrise, ci numai *reprezentate*” („Eine Form kann nicht beschrieben sondern nur dargestellt werden”[29]).

[26] Cf. PR, XV, 174.
[27] Cf. PR, XV, 173.
[28] Cf. PR, XV, 173.
[29] Wittgenstein, *Philosophische Bemerkungen*, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1964, XV,171, p. 208.

Teoria mulţimilor caută să înţeleagă infinitul la un nivel mai general decât teoria regulilor. Ea susţine că nu poţi înţelege infinitul real prin simbolismul aritmetic şi el nu poate fi decât descris, nu reprezentat (exact pe dos decât crede Wittgenstein!).

„Descrierea ar conţine ceva în genul modului în care duceţi o serie de lucruri nu în mâini, ci într-o cutie. Ele sunt invizibile, dar noi şim că le transportăm (la modul indirect).

Teoria mulţimilor duce o pisică într-o traistă. Lăsaţi infinitul să se adapteze în această traistă cum poate mai bine. De aici provine ideea că putem descrie formele logice prin limbaj. Într-o asemenea descriere, structurile şi corelaţiile sunt prezentate într-un pachet şi ele nu arată că am putea vorbi despre o structură fără să o reproducem în propoziţia în sine."[30]

Din perspectivă intensională, interesul se îndreaptă către o esenţialitate a numărului pe care Wittgenstein a căutat-o tot timpul. Matematicienii abordează o generalitate care nu se exprimă, dar ei o descriu, fără să o reprezinte. Sau mai bine zis, o reprezentaţionează greşit, lacunar, forţat, nejustificat. Infinitul e o astfel de formă care este descrisă necorespunzător, numărul real la fel.

Definiţia pe care o dă Dedekind unei mulţimi infinite este, de asemenea, de acest gen: ea vrea să descrie infinitul, fără să îl reprezinte.

„E ca şi cum am descrie o boală, prin simptomele exterioare despre care ştim că apar mereu în acelaşi timp cu ea. Şi încă în acest caz este o legătură care nu e de natură formală."[31]

3. CRITICA LUI WITTGENSTEIN ASUPRA DEMONSTRAŢIEI PRIN METODA DIAGONALĂ A LUI CANTOR

Teoria mulţimilor a lui Cantor este criticată sistematic de Wittgenstein. Filosoful neagă rigurozitatea şi elocvenţa faptului că se poate stabili o corespondenţă biunivocă între elementele a două mulţimi infinite, iar teorema de nenumărabilitate a mulţimii numerelor reale este discreditată.

Celebra demonstraţie a lui Cantor, că mulţimea numerelor reale considerate în intervalul (0,1) nu este numărabilă, şi anume că ea are o putere mai mare decât mulţimea numerelor naturale (se arată de către matematica *extensionalistă* că mulţimea numerelor raţionale, precum şi cea a numerelor algebrice sunt numărabile), se desfăşoară astfel:

Se scriu toate numerele raţionale sub formă zecimală infinită, respectând regula: fracţiile zecimale finite sunt transformate în numere zecimale infinite, înlocuind ultima cifră „n" cu „n-1" şi completând şirul până la „infinit" cu 999999....;

[30] PR, XV, 170.
[31] PR, XV, 171.

Astfel, în şirul tuturor numerelor zecimale reprezentat astfel:

$0.a_{11}a_{12}a_{13}$ ...

$0.a_{21}a_{22}a_{23}$ ...

$0.a_{31}a_{32}a_{33}$ ...

....

se consideră numărul „diagonal” $0.a_{11}a_{22}a_{33}$ ... pentru care, având în vedere că fiecare a_{jk} este o cifră oarecare, se ia $b_{kk} \neq a_{kk}$, astfel că numărul $0.b_{11}b_{22}b_{33}$ ... va fi diferit de orice număr din seria iniţială, din simplul motiv că va diferi de primul număr cel puţin prin prima zecimală, de al doilea, cel puţin prin a doua zecimală ş.a.m.d.

Astfel se „obţin” (proiectează) numere zecimale care nu se află în şirul „tuturor numerelor zecimale”, aşadar scrierea de mai sus nu poate conţine „toate” numerele sub formă zecimală.

Cantor consideră că astfel demonstrează că obţine o mulţime de o putere superioară celei a numerelor naturale (raţionale), şi anume continuumul de numere reale, care este de aceeaşi putere cu mulţimea tuturor submulţimilor posibile a numerelor naturale.

Desigur, procedeul poate continua, considerând mai departe mulţimea tuturor submulţimilor de numere astfel obţinute (reale) sau mulţimea tuturor funcţiilor reale, de o putere superioară; şi aşa mai departe, ca să folosim „ciudata” şi imprecisa expresie criticată de Wittgenstein, *and so on*... puterea mulţimii tuturor funcţiilor de funcţii e superioară celei precedente (a mulţimii funcţiilor reale)... paradoxul survine imediat: dacă avem o putere maximală a unei mulţimi (supraetajate la maximum), se arată că mulţimea submulţimilor sale are o putere superioară (paradoxul lui Burali-Forti).

Din tot ce am arătat până acum, se poate înţelege că Wittgenstein nu poate fi de acord cu aproape nici un pas al aşa-zisei demonstraţii al lui Cantor prin metoda diagonală.

Mai întâi, nu poate fi vorba despre un şir al „tuturor” numerelor zecimale. E ca şi cum am fi în posesia scrierii generalităţii oricărui tip de număr; or, scrierea zecimală este o sugestie vagă a complexităţii numerelor reale; apoi, acele „puncte-puncte” trebuie să facă parte dintr-o regulă în spiritul căreia trebuie să procedăm la obţinerea unui alt număr, diferit de regulă; înaintând spre „infinit”, ar trebui să ne imaginăm generări infinite de determinaţii care trebuie să funcţioneze independent, şi atunci nu mai poate fi vorba de o anume *regulă*. Astfel, numărul *real* se pierde în seria infinită. Aceste numere par anterioare construcţiei, deci de tip platonist-realist, în contrasens cu constructivitatea lor.

Wittgenstein ridiculizează (socratic) metoda diagonală, arătând cum se pot obţine *alte* numere decât cele dintr-o serie zecimală ordonată după o regulă oarecare (cum e cea de mai jos, dată de Wittgenstein în *Remarks on the Foundations of*

Mathematics[32]), nu prin artificiul lui Cantor (în care se ia $b_{kk} \neq a_{kk}$), ci prin cu totul alte reguli, aşa încât posibilitatea acestor numere diferite de cele dintr-o serie zecimală dată să devină evanescentă. Şi, atunci, în ce ar consta deosebirea „calitativă" dintre aceste numere? La fel de bine cum se arată că putem găsi un număr diferit de o serie dată, într-un *anumit* mod, putem să găsim un *alt* număr, în *alt* mod.

Iată un exemplu:

„În ce măsură metoda diagonalei demonstrează că există un număr – spunem noi – care nu e o rădăcină pătrată exactă? – Evident, e foarte uşor de demonstrat că există numere care nu sunt rădăcini pătrate exacte – dar cum funcționează metoda pentru a demonstra aceasta?

$\sqrt{1}$				
$\sqrt{2}$				
$\sqrt{3}$				
$\sqrt{4}$				
$\sqrt{5}$				

Avem deci un concept general a ceea ce semnifică: a arăta că există un număr care nu aparţine unui ansamblu infinit?

Să ne imaginăm că cineva are sarcina să numească un număr diferit de toate $\sqrt[2]{n}$; dar ar ignora procedeul de construcţie prin metoda diagonalei şi ar da ca soluţie numărul $\sqrt[3]{2}$; şi ar arăta că nu este vorba despre un $\sqrt[2]{n}$. Sau ar fi spus: consideraţi $\sqrt{2}$ = 1.4142... şi scoateţi 1 din prima zecimală, dar în celelalte locuri lăsaţi zecimalele care îi corespund.

1.3142.... nu poate fi un $\sqrt{n}$."[33]

O regulă (dată de Wittgenstein) se poate substitui celei consfinţite de Cantor şi atunci apare un dezacord între forma numărului nou şi cea a numerelor iniţiale.

Problema aici este cea a *totalității* invocate de Cantor: cum se poate obţine o „totalitate întreagă", ca să mă exprim pleonastic, adică una despre care să ştiu că poate conţine toate numerele de un anumit tip (pe cele zecimale în speţă?). Regula, metoda de calcul a numărului şi rezultatul său apar diferite, incerte: metoda diagonală nu este una de obţinere a unui număr! Fiindcă nu putem discerne „împrejurimile matematice" ale sale şi nu îi putem stabili „locul matematic"[34].

[32] Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics* (RFM), editori G.H. Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe, trad. G.E.M. Anscombe, Basil Blackwelll, Oxford, 1998, p. II, 1.

[33] RFM, II, 1.

[34] Cf. RFM, II, 3.

Intuiţia ne spune că avem de comparat diferite „metode de calcul” care nu au acces la o formă generală (căci ar trebui să comparăm astfel de forme generale şi să le privim ca diferenţe, ceea ce ar fi un nonsens):

„Deci eu compar metode de calcul, dar există diferite tipuri de comparaţii. Dar într-un anumit sens, trebuie să compar *rezultatele* diferitelor metode. Şi aici totul se complică, pentru că într-un sens, ele nu au toate un rezultat sau, ceea ce trebuie să considerăm ca rezultat în fiecare caz, nu este clar de la început. Vreau să spun că aici ne este dată orice latitudine pentru a modifica şi a răstălmăci semnificaţiile.”[35]

Sau, la fel de elocvent:

„Să spunem – nu: «metoda dă rezultatul», ci, mai debrabă: «ea ne dă o serie infinită de rezultate». Cum să fac pentru a compara seriile infinite de rezultate? Da, atunci există o grămadă de lucruri pe care pot să le numesc astfel. Aici revenim mereu la: priveşte un pic mai mult în jurul tău! ”[36].

Wittgenstein consideră că demonstraţia lui Cantor este ca rezultatul unui calcul exprimat într-un limbaj verbal; calculul e socotit ca fiind „instrumentul cel mai rafinat pentru determinarea semnificaţiei”[37]. Dar, dacă un calcul arată cel mai bine semnificaţia unui rezultat, clarifică şi dă sensul exprimării verbale care îl însoţeşte, în cazul demonstraţiei lui Cantor, lucrurile se petrec invers. Expresiile verbale „proiectează o aparenţă de generalitate” asupra calculului. Ceea ce se spune că este o formă generală a seriei de numere zecimale, nu este şi exprimat formal, ci e doar declarat; e o ambiguitate care permite o dezvoltare a unui raţionament cu aparenţă de rigurozitate; dar rigurozitatea se bazează în fond pe un artificiu discutabil:

„Te voi învăţa o metodă care îţi va permite într-o desfăşurare, să eviţi toate aceste dezvoltări în serie. Această metodă este metoda diagonalei a lui Cantor. – Deci ea produce o serie diferită de toate celelalte. Este asta exact?”[38]

„Nici «gramatical», conceptul de *nenumărabilitate* nu se justifică. Dacă ar fi operaţional un asemenea concept în demonstraţia diagonală, atunci el ar trebui să se aplice şi numerelor unei serii raţionale, dar şi, de pildă, seriei îmbogăţite cu numărul diagonal. Adică, şi într-o serie de numere numărabile, şi uneia cu numere nenumărabile. Aşadar, indiferent de numerele care intră sub incidenţa acestui concept (de *nenumărabilitate*, s.n.) pe care le-ai aranjat într-o serie, numărul diagonal al acestei serii cade de asemenea sub acelaşi concept”.[39]

Şi asta se împotriveşte cursului demonstraţiei diagonale, căci numărul diagonal, ca nenumărabil, a fost pus în evidenţă prin opoziţie cu o serie de numere care puteau fi numărabile.

---

[35] RFM, II, 4.
[36] RFM, II, 5,6.
[37] RFM, II, 7.
[38] RFM, II, 8.
[39] RFM, II, 10.

„...nu are sens să vorbim despre «o serie a *tuturor* numerelor reale» pentru că numim de asemenea «număr real» numărul diagonal al seriei”[40]. De aceea aici apare un paradox gramatical.

Wittgenstein se opune de fapt acelei intuiţii prin care se pot concepe serii nesfârşite (*cu* sau *fără* reguli).

Fiindcă ne aducem aminte cum se derulează aceste intuiţii de tip extensionalist (criticate de Wittgenstein) în PR. Dacă am presupune că avem toate numerele iraţionale re-prezentate prin legi, încă altele pot fi date prin tăieturi (care nu sunt acolo); avem în vedere că acest *toate* e limitat la un aspect perceptibil sau intuibil; oricât de „departe” aş merge cu extensia unei fracţii zecimale, se va găsi mereu o fracţie raţională corespondentă. De la asemenea *cadre* se pleacă în demonstraţia lui Cantor. Astfel, „nu putem deci să spunem că fracţiile zecimale infinite, progresând după o lege, să fie încă avide de a fi completate de un ansamblu infinit de fracţii zecimale infinite şi neordonate care «nu pot fi scrise» dacă *ne-am limita la fracţiile produse conform unei legi*.

Unde găsim o asemenea fracţie infinită produsă fără conformitatea unei legi? Şi cum am putea să-i observăm absenţa? (Cum constat absenţa unei legi?, n.n.) Unde e vidul peste care ar trebui să tragem un pod? Dacă, de la început, numai legile duc până la infinit, întrebarea de a şti dacă totalitarea legilor epuizează totalitatea fracţiilor zecimale infinite, nu ar avea sens deloc.

Modul de a vedea obişnuit este de acest fel: anumite numere reale au o altă multiplicitate decât numerele raţionale; cel puţin putem să începem prin a scrie cele două serii una lângă cealaltă, şi cea a numerelor reale o lasă pe cealaltă undeva în urma sa şi fuge mereu mai departe la infinit.”[41]

Dar Witgenstein nu priveşte „obişnuit”, căci el nu concepe o juxtapunere decât a unor serii finite, iar „a adăuga trei puncte la capătul acestui fragment finit (ca semn că seria merge la infinit... *and so on*) nu are nici un sens. Altfel putem să comparăm o lege cu o lege, dar nu o lege cu *nici o* lege.”[42]

And so on nu are o finalitate exprimabilă matematic.

S-ar putea spune că numărul diagonal reuşeşte să evite fiecare dezvoltare zecimală a numerelor anterioare, dar aceasta nu îl face să „înainteze”, căci celelalte dezvoltări îl preced. Wittgenstein e de acord din demonstraţia lui Cantor cu un singur lucru, şi anume că „există *întotdeuna* o serie despre care nu ştim dacă ea este diferită sau nu faţă de seria diagonală. Putem spune: ele se urmăresc la infinit, dar seria originală este întotdeauna înainte (le precede, n.n.).”[43] Sau, în acelaşi sens, „procedeul arată ceva ce am putea numi într-un mod foarte vag demonstraţia faptului că *această* metodă de calcul nu poate fi înscrisă într-o serie. Şi numai sensul lui *această* rămâne vag”[44].

---

[40] RFM, II, 16.
[41] PR, XVII, 181
[42] PR, XVII, 181
[43] RFM, II, 9
[44] RFM, II, 14.

Iată cum se poate reprezentaţiona[45] demonstraţia lui Cantor, spre deosebire de situaţia surprinsă critic de Wittgenstein: în primul desen, seria de numere reale şi numărul diagonal au ajuns deja la infinit, numărul diagonal e altul (sau/şi de alt tip decât cele ale seriei) (Cantor), în al doilea desen, infinitul se prefigurează, numărul diagonal nu este diferit în mod necesar de cele ale seriei:

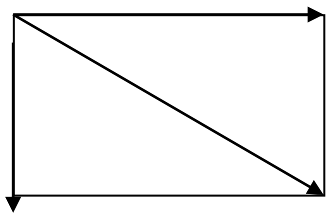

Figura 1

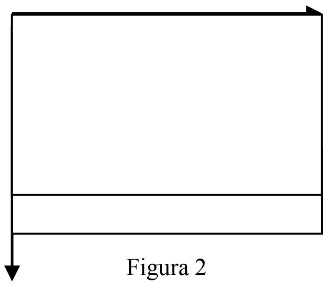

Figura 2

După Christine Redecker[46] care, în volumul său, alocă un spaţiu substanţial criticilor lui Wittgenstein asupra demonstraţiei lui Cantor, situaţia reprezentaţionată mai sus apare scrisă ca formalism matematic (aşa cum voi arăta imediat);

Autoarea problematizează după secţiuni ideile lui Wittgenstein:

– dacă prin demonstraţia diagonală se ajunge efectiv la un număr real (zecimal-iraţional) (RFM II,1-8);

– dacă numărul diagonal este diferit de toate numerele seriei zecimale (RFM II, 9-11);

– dacă demonstraţia diagonală este efectiv o demonstraţie (RFM II, 12-15);

– dacă avem de a face aici cu un concept clar de (ne)numărabilitate (RFM II, 16-21);

– dacă procedura diagonală demonstrează că există mulţimi infinite de cardinalităţi diferite (RFM II, 22).

Conform lui Redecker:

– la prima chestiune, răspunsul este că metoda diagonalei nu conduce de la sine la un număr real (şi ar putea rămâne în seama metodelor constructiviste dezvoltate ulterior în matematică, aşa cum e de pildă demonstraţia că $\sqrt{2}$ nu este un număr raţional).

– în continuare Redecker caută să exprime matematic formal critica lui Wittgenstein referitor la faptul că nu putem spune cu siguranţă că numărul diagonal este diferit de toate numerele seriei care sunt date „înainte” de a fi obţinut numărul diagonal. Astfel, dacă notăm cu D_∞ numărul diagonal şi cu V_n al n-lea element al

[45] Cf, RFM, II, 11.

[46] Redecker, Christine, *Wittgensteins Philosophie der Mathematik: Eine Neubewertung im Ausgang von der Kritik an Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen*, Frankfurt-Hausenstamm: Ontos Verlag, 2006, (*O reevaluare pornind de la o critică a demonstraţiei lui Cantor asupra nenumărabilităţii numerelor reale*).

seriei, atunci e importantă diferenţa dintre „diferit de fiecare număr din listă" (Cantor) şi „diferit faţă de toate numerele din listă" (Wittgenstein).

Astfel, prima situaţie este cea cantoriană, transcrisă

$\forall n \in \mathrm{N}\ (D_\infty \neq V_n) \leftrightarrow \forall n \in \mathrm{N}\ \exists\xi>0\ (|D_\infty - V_n| > \xi$

iar situaţia wittgensteiniană este

$\forall n \in \mathrm{N}\ (D_\infty \neq V_n) \leftrightarrow \exists\xi>0\ \forall n \in \mathrm{N}\ (|D_\infty - V_n| > \xi$;

– la a treia chestiune se ajunge la concluzia că nu avem de a face cu un concept clar de (ne)numărabilitate, punându-se în evidenţă paradoxul pe care l-am numit mai sus „gramatical" sau „conceptual" (la RFM, II, 10). De altfel, autoarea consideră că „demonstraţia lui Cantor se situează între o demonstraţie propriu-zisă, un paradox, sau o definiţie a unui concept", nefiind nimic din toate acestea: după cum arăta şi Wittgenstein, numărul diagonal nu e nici riguros constituit, nici nu cade sub un concept clar de nenumărabilitate.

Wittgenstein scrie: „Eroarea începe atunci când spunem că numerele cardinale pot fi aranjate în serie. Ce concept avem pentru această ordine? Avem cu siguranţă, conceptul unei serii infinite, dar asta ne dă mai mult decât o idee vagă, un ghid pentru construcţia unui concept. Conceptul însuşi este *dedus* (*abstras*, n.n.) din această serie şi din câteva altele; sau mai bine: expresia caracterizează o anumită analogie de cazuri şi putem să o folosim pentru a determina provizoriu un domeniu despre care vrem să vorbim. Dar asta nu înseamnă că întrebarea următoare are un sens clar: Putem să ordonăm într-o serie mulţimea R?"[47]

– tot un rezultat negativ primeşte şi al patrulea aspect pus în evidenţă de Redecker: procedeul diagonal nu demonstrează că numerele reale au o cardinalitate superioară faţă de cele naturale. Am arătat care sunt motivele lui Wittgenstein să refuze tipuri şi ierarhii diferite de „infinităţi". Nu avem o diferenţă între numerele cardinale şi cele reale decât ca „reguli" ale unor „jocuri de limbaj matematic" şi nu la nivel ontologic. După cum nu putem să vorbim de „toate numerele cardinale", la fel ne este interzis să concepem „toate numerele reale". Apoi, ne lipseşte un criteriu matematic riguros de a ordona numerele reale pe un schelet de ordonare unu la unu a numerelor naturale. Dar nici din faptul că numerele reale nu pot fi ordonate într-o serie, nu rezultă că ar avea o cardinalitate mai mare decât numerele naturale[48].

Criticile lui Wittgenstein asupra metodei diagonale a lui Cantor sunt dintre cele mai pertinente din filosofia wittgensteiniană a matematicii. Plecând de la ele, s-au dezvoltat metodele constructiviste de obţinere a unor numere (cum e cazul lui $\sqrt{2}$), adică cele care efectiv construiesc „iraţionalitatea" numerică, şi nu numai o invocă. Wittgenstein este împotriva demonstraţiilor „uşoare", pe baza cărora se demonstrează lucruri „grele". Se află în acestea ceva „înşelător", cum se exprimă filosoful.

[47] RFM II, 16.

[48] Redecker invocă paradoxul lui Richard, conform căruia numărabilitatea nu e un criteriu al mărimii unei mulţimi şi înlocuieşte conceptul de „numărabilitate" cu acela de „ordonabil într-o δ-serie": o serie de numere cardinale având proprietatea că numărul său diagonal este un număr real.

Lui Wittgenstein nu îi rămâne decât să constate că anumite obişnuinţe (precum demonstraţia prin metoda diagonalei) se înrădăcinează în practica matematicienilor; el le numeşte „maladii" (RFM, II, 23), dar pentru asemenea lucruri, criticile din RFM sunt poate cel mai bun „medicament": „Dacă am spune: «Meditaţia asupra procedeului diagonalei ne arată că *conceptul* de număr real are mult mai mică legătură cu conceptul de număr cardinal decât suntem tentaţi să gândim, din pricina unei analogii înşelătoare», asta ar avea un sens veridic şi onest. Dar în realitate se produce tocmai *contrariul*: în «măsura» în care se compară «mulţimea» numerelor reale cu cea a numerelor cardinale, aşa-zicând după mărimea lor. Diferenţa de natură dintre cele două este expusă ca diferenţă între extensiuni, prin şmecheria unei expresii eronate. Cred şi sper ca generaţia viitoare să râdă de o asemenea jonglerie."[49]

[49] PR, II, 22.