DOI: 10.59277/PL.2025.28.14

LIMITELE LIMBAJULUI ȘI LIMITELE SISTEMELOR FORMALE[1]

EMANUEL ȘTEFAN

Facultatea de Filosofie, Universitatea București

LIMITS OF LANGUAGE AND LIMITS OF FORMAL SYSTEMS

Abstract. This paper offers an analytic comparison between Wittgenstein's *Tractatus* and Gödel's incompleteness theorems, arguing for a structural correspondence between the limit of sense and the limit of provability. I clarify bipolarity (as a condition for sense) and representability (as required for arithmetization), and explain why attempts to "say" a system's own form are nonsensical within the *Tractatus*. On Gödel's side, arithmetization and the diagonal lemma yield a true but unprovable sentence G and show that a system P cannot prove Con(P) using only its own resources (under the usual consistency hypotheses – ω-consistency or, via Rosser, simple consistency). On this basis, I formulate the *Tractatus* versus Gödel (TvG) Blind Spot Conjecture: no representational system can, from within itself, exhaustively express the conditions of its own intelligibility. The result is not an identity claim but a principled structural analogy, philosophically and metamathematically motivated, showing that any such system leaves, by necessity, a "blind spot" with respect to its enabling conditions.

Keywords: Wittgenstein's *Tractatus*; Gödel's incompleteness theorems; self-reference; bipolarity and representability; TvG (Blind Spot) Conjecture.

1. INTRODUCERE: IDEEA ȘI PLANUL LUCRĂRII

Lucrarea pune față în față două opere clasice din primele decenii ale secolului al XX-lea, *Tractatus Logico-Philosophicus* și *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I* și argumentează că ele împărtășesc o idee comună de limită a autoelucidării. Analiza urmărește trei puncte de contact dintre cele două opere: (1) bipolaritatea ca o condiție a sensului, în *Tractatus*, versus reprezentabilitatea în sistemul P, la Gödel; (2) mecanismele de autoreferință implicate în propoziția 6.54 și în construcția propoziției G; precum și (3) raportul dintre limitele sensului și limitele demonstrabilității. Arăt că, în pofida diferenței de registre – analiză filosofică a limbajului versus logică matematică – ambele lucrări răspund unui mediu intelectual cu mulți stimuli comuni și ambele scot la lumină o

[1] O versiune restrânsă a acestei lucrări a fost prezentată în cadrul conferinței „International Conference for Emerging Researchers in Philosophy and Language Sciences" (PhiLanSci UAM 2025), desfășurată la Madrid, la data de 28 mai 2025, sub titlul *Limits of Language and Limits of Formal Systems: A Comparative Analysis of Wittgenstein's Tractatus and Gödel's Incompleteness Theorems*.

limită internă a sistemelor capabile de autoanaliză: ceea ce face posibilă reprezentarea nu poate fi exprimat în sistem, iar în registru metamatematic nu este demonstrabil din interior. Mai mult, această corespondență obținută în contexte atât de diferite – în sens maxim la Wittgenstein (limbajul ca sistem general de reprezentare), respectiv în sens minim la Gödel (aritmetica elementară formalizată) – nu este întâmplătoare, ci se datorează constrângerilor interne ale sistemelor.

Lucrarea este structurată în două părți principale, urmate de o concluzie sub forma unei conjecturi. Capitolul 2, „Natura constructivă a teoremelor de incompletitudine", oferă o prezentare semi-formală, riguroasă și accesibilă a întregului aparat dezvoltat de Gödel. Prezint detaliat numerotarea Gödel, noțiunea de reprezentabilitate, mecanismul lemei diagonale și construcția riguroasă a propoziției G, culminând cu demonstrațiile celor două teoreme și cu analiza consecințelor lor imediate.

Capitolul 3, „*Tractatus-ul* și teoremele de incompletitudine", plasează cele două opere în contextul comun al căutării fundamentelor și începe analiza comparativă propriu-zisă. Ne vom concentra pe trei puncte de contact esențiale: rolul jucat de bipolaritate în *Tractatus* versus cel al reprezentabilității la Gödel ca precondiții ale sistemelor; mecanismele de autoreferință implicate în propoziția 6.54 și, respectiv, în propoziția G; și, în final, paralela filosofică dintre limitele sensului și limitele demonstrabilității.

Capitolul 4, „Conjectura TvG – *Tractatus* versus Gödel (Conjectura punctului orb)", sintetizează aceste paralele și formulează, sub forma unei conjecturi, o generalizare a rezultatelor analizei la toate sistemele de reprezentare.

2. NATURA CONSTRUCTIVĂ A TEOREMELOR DE INCOMPLETITUDINE: O PREZENTARE SEMI-FORMALĂ

2.1. NUMEROTAREA GÖDEL

Pornim de la un sistem formal capabil să exprime un anumit fragment de matematică elementară. Gödel a numit acest sistem P, iar el corespunde aproximativ porțiunii din *Principia Mathematica* care este suficientă pentru formularea aritmeticii elementare.

Fiecare formulă din sistemul P este un șir de simboluri și poate fi reprezentată ca o secvență de numere, după cum urmează:

Fiecărui simbol din sistem i se asociază un număr natural unic. De exemplu, putem aloca:

$0 \rightarrow 1$, S $\rightarrow 2$, $= \rightarrow 3$, $\sim \rightarrow 4$, $+ \rightarrow 5$, $(\rightarrow 6$, $) \rightarrow 7$, p $\rightarrow 8$, $\vee \rightarrow 9$, ș.a.m.d.

Aceste numere sunt folosite drept exponenți într-o schemă fixată de codificare: fiecare număr din secvență devine exponentul unui număr prim corespunzător, iar produsul acestor puteri formează un număr Gödel unic pentru acea formulă.

Formula generală de obținere a numerelor Gödel, conform schemei de codificare aleasă, este: $\ulcorner N \urcorner = \prod p_i^{ai}$, i = 1, …, k, unde p_i reprezintă șirul numerelor prime, iar a_i reprezintă șirul exponenților obținuți din aplicarea schemei de codare.

Pentru a reconstitui formula dată pornind de la numărul ei Gödel, vom urma pașii în ordine inversă: în primul rând, vom descompune numărul dat în factori primi. Conform teoremei fundamentale a aritmeticii, această descompunere este unică. Vom ordona factorii crescător, în funcție de bază și apoi vom extrage exponenții lor, în ordinea în care apar. În sfârșit, vom asocia fiecărui exponent simbolul corespunzător pentru a obține formula dată.

Statutul unui număr – dacă este sau nu un „număr Gödel" valid – nu este o proprietate absolută a numărului în sine, ci depinde de sistemul de codificare ales. Există o infinitate de posibilități distincte în care putem alege codificarea simbolurilor necesare pentru numerotarea Gödel, dar, în sine, oricare este la fel de potrivită scopului și oricare două codificări alese sunt echivalente. Scopul nu este să creăm un singur limbaj standardizat, ci să arătăm că orice sistem formal cu caracteristicile amintite poate fi aritmetizat în acest mod.

Pentru a codifica un șir de formule, vom proceda în felul următor: asociem fiecărei formule un număr Gödel, N_1, N_2, ..., iar apoi construim numărul $2^{N1} \cdot 3^{N2} \cdot ...$ și obținem astfel un nou număr Gödel, să-l notăm M asociat unui șir de formule. Formula generală de obținere a numărului $\ulcorner M \urcorner$ este $M = \prod p_i^{Ni}$, i = 1, …, k, unde p_i reprezintă șirul numerelor prime, iar N_i reprezintă șirul numerelor Gödel asociate formulelor. Scopul acestei aritmetizări este ca afirmații metamatematice (privind ce se demonstrează în P) să fie exprimate ca propoziții aritmetice în limbajul lui P; astfel, P poate formula, prin codurile Gödel, enunțuri despre propriile demonstrații.

2.2. REPREZENTABILITATEA

Sistemul în care funcționează demonstrația lui Gödel este orice construcție formală efectiv axiomatizabilă în care putem exprima aritmetica elementară. În acest context, termenul „efectiv" trimite la ideea existenței unui procedeu finit. Formalizarea matematică riguroasă pe care Gödel o dă acestor noțiuni intuitive este exact clasa funcțiilor și predicatelor recursive primitive[2]. Această clasă oferă un cadru precis pentru ceea ce putem calcula sau verifica prin proceduri finite și va constitui fundamentul pentru discuția despre aritmetizarea sintaxei și reprezentabilitate. Funcțiile recursive primitive sunt construite din funcțiile de bază (zero, succesor, proiecții) prin compoziție și recursie primitivă. Exemple familiare sunt adunarea, înmulțirea și exponențierea.

În construcția sa, Gödel codifică expresiile sintactice ale sistemului formal prin numerotarea Gödel, transformând proprietăți precum „x este o formulă bine formată" sau „y este o demonstrație" în predicate recursive primitive definite pe aceste coduri.

[2] Gödel a fost inițiatorul aritmetizării sintaxei folosind predicate și funcții recursive primitive în acest rol metateoretic. Noțiunea generală de „calcul efectiv" a primit ulterior caracterizări echivalente (Church, Turing etc.). Clasa funcțiilor recursive primitive rămâne însă suficientă pentru reprezentabilitatea necesară în demonstrația din 1931.

Această abordare permite aritmetizarea sintaxei – adică reducerea problemelor metamatematice la cele aritmetice – și asigură reprezentabilitatea tare a acestor predicate în interiorul lui P[3]. „Aritmetizabil" înseamnă: putem formula în aritmetică relația dorită (adevărată în N). „Reprezentabil în T", unde T este o teorie formală în general, adaugă cerința demonstrabilității într-un cadru axiomatic. Mai exact, „reprezentabil în T" înseamnă pentru orice n, dacă Φ(n) este o formulă adevărată în N, atunci T⊢ Φ(n), iar – în varianta tare a reprezentabilității – dacă Φ(n) nu este adevărată în N, atunci T ⊢ ¬ Φ(n).[4] Drumul pe care îl urmează Gödel este de la recursiv primitiv la aritmetizabil și de acolo mai departe la reprezentabil în sensul tare în sistemul P[5].

În general, fiecare funcție sau relație recursivă primitivă este astfel reprezentabilă în aritmetica formală – în particular, în P – și, prin reprezentarea ei, are un număr Gödel asociat. Această asociere numerică este esențială pentru demonstrația lui Gödel: ea permite sistemului să își exprime structura proprie în termeni aritmetici. Practic, orice afirmație despre formule devine o afirmație despre numere.

Prin tehnica numerotării Gödel, proprietățile sintactice relevante ale limbajului lui P devin relații asupra numerelor naturale; ele sunt definibile aritmetic și – în măsura necesară – reprezentabile în P. Cu alte cuvinte, metamatematica și metalogica devin aritmetică.

În sistemul P, fiecare formulă este un șir finit de simboluri, iar prin numerotarea Gödel putem asocia fiecărei formule un număr. Considerăm funcția lungime, L(x), care dă numărul de simboluri al formulei cu numărul Gödel x. Aceasta poate fi definită schematic prin recursie pe structura formulelor:

L(x) =	k(x),	dacă x codifică o formulă atomică,
	L(y) + L(z) + $c_{\wedge}$,	dacă x codifică (φ ∧ ψ), unde y = ⌜ φ ⌝, z = ⌜ ψ ⌝,
	L(y) + $c_{\neg}$,	dacă x codifică ¬φ,
	L(y) + $c_{\forall}$,	dacă x codifică ∀vφ,
	0,	altfel (dacă x nu codifică o formulă bine formată),

unde $c_{\wedge}$, $c_{\neg}$, $c_{\forall}$ sunt constante care depind de convenția de numărare.

[3] Așa cum știm după rezultatul lui Tarski, nu există o formulă aritmetică care să definească în același limbaj predicatul de adevăr pentru aritmetica de ordinul întâi; în consecință, acest predicat nu este reprezentabil în P sau în orice alt sistem coerent suficient de puternic pentru a exprima aritmetica. Vezi Alfred Tarski, „The concept of truth in formalized languages", în *Logic, semantics, metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, trad. J. H. Woodger, ed. John Corcoran (ed. a 2-a), Indianapolis, Hackett Publishing, 1983, p. 254. În schimb, predicatele sintactice relevante pentru teorema lui Gödel (de tipul „x este formulă", „x este o demonstrație a lui y") sunt aritmetizabile și reprezentabile. Un aspect esențial al succesului lui Gödel se datorează faptului că a operat exclusiv cu noțiuni sintactice (formulă, axiomă, demonstrație, demonstrabil), care sunt verificabile mecanic și, prin urmare, reprezentabile. Teorema lui Tarski arată că noțiunile semantice (de exemplu, noțiunea de adevăr) nu se bucură de aceeași proprietate și nu pot fi supuse unui procedeu similar.

[4] În formulările generale folosim n ca număr natural arbitrar. Când discutăm însă la nivel intern, într-o teorie formală, același n este reprezentat prin numeralul său, pe care îl notăm n cu o bară deasupra: n̄.

[5] În această lucrare, folosim reprezentabil în sens tare.

Această funcție este recursivă primitivă întrucât: i) se bazează pe descompunerea structurală finită a formulelor; ii) fiecare pas folosește operații primitive (de ex., extragerea componentelor din numărul Gödel) și iii) procesul se oprește întotdeauna, deoarece formulele au lungime finită. Funcția poate fi reprezentată în P printr-o formulă Lungime(x,y) în P: „formula cu numărul Gödel x are lungimea y".

Exemplu concret:

Formula ∀x (x = x) are 7 simboluri. Dacă numărul ei Gödel este, să presupunem, 12700, atunci în P putem demonstra:

$P \vdash \text{Lungime}(12700, \overline{7})$

De asemenea, putem arăta că:

$P \vdash \neg\text{Lungime}(12700, \bar{n})$, pentru orice $n \in N \setminus \{7\}$.

Acest exemplu arată cum proprietăți sintactice precum „este formulă", „este demonstrație", „are lungimea n" devin funcții sau relații recursive primitive, deci aritmetizabile și reprezentabile. Exact pe acest tip de mecanism se bazează construcția lui Gödel.

În general, spunem că o funcție asupra numerelor naturale este reprezentabilă într-o teorie formală atunci când putem găsi o formulă din limbajul acelei teorii care exprimă corect funcția: pentru orice intrări, teoria poate demonstra că un anumit număr este rezultatul funcției aplicate la acele intrări și, de asemenea, poate demonstra că niciun alt număr nu poate fi rezultatul. Cu alte cuvinte, teoria „recunoaște" în mod intern valoarea corectă a funcției.

O relație asupra numerelor naturale este reprezentabilă într-o teorie formală atunci când există o formulă a teoriei care decide corect, pentru orice combinație de numere, dacă ele satisfac sau nu acea relație. Mai exact: dacă relația este adevărată pentru anumite numere, teoria poate demonstra propoziția care afirmă asta; dacă relația nu este adevărată, teoria poate demonstra negația.

2.3. MINIMUL NECESAR

După ce am stabilit că proprietățile sintactice ale unui sistem formal pot fi aritmetizate și sunt reprezentabile în P, o întrebare justă apare: care este minimul necesar de putere aritmetică ca aceste noțiuni și procedee să funcționeze? Care este acel sistem „efectiv axiomatizat" în care putem exprima aritmetica și putem, mai departe, aritmetiza sintaxa logică? Ce set minimal de axiome aritmetice este necesar pentru ca un sistem să poată reprezenta funcțiile recursive necesare și, prin urmare, să fie supus teoremelor de incompletitudine ale lui Gödel? Răspunsul este surprinzător de simplu, deoarece avem nevoie de surprinzător de puțin.

Sistemul pe care îl folosește propriu-zis Gödel în lucrarea din 1931 – sistemul pe care îl notează P – este, în esență, ceea ce rezultă când suprapunem logica din *Principia Mathematica* peste axiomele aritmeticii lui Peano[6]. Într-o notă, Gödel precizează că adăugarea axiomelor lui Peano are rol simplificator în demonstrație;

[6] Kurt Gödel, „*On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I*", în Kurt Gödel, *Collected Works. Volume I: Publications 1929–1936*, ed. S. Feferman ș.a., Oxford, Oxford University Press, 1986, p. 151.

în principiu, argumentul poate fi formulat în orice teorie efectiv axiomatizabilă și suficient de expresivă pentru aritmetica elementară. Ca reper minim standard, voi folosi aritmetica lui Robinson[7] (notată standard Q) în raport cu care aritmetica lui Peano (notată standard PA) este o extindere strictă[8] a lui Q

(PA = Q + schema de inducție).

În continuare, voi prezenta pe scurt cele două teorii.

Aritmetica lui Robinson (Q) se bazează pe un limbaj formal cu o constantă (0), o funcție succesor (S) și două operații (+, ·). Ea este definită de următoarele șapte axiome:

Axiomele Succesorului:

1. $\forall x\ (\neg(Sx = 0))$
2. $\forall x \forall y\ (Sx = Sy \rightarrow x = y)$
3. $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y\ (x = Sy))$

Axiomele Adunării:

4. $\forall x\ (x+0 = x)$
5. $\forall x \forall y\ (x+Sy = S(x+y))$

Axiomele Înmulțirii:

6. $\forall x\ (x \cdot 0 = 0)$
7. $\forall x \forall y\ (x \cdot Sy = (x \cdot y)+x)$

Ce poate și ce nu poate demonstra Q: în Q se pot demonstra toate instanțele numerale ale regulilor recursive: de pildă, pentru fiecare n fix, $0 + \bar{n} = \bar{n}$ este demonstrabil, dar fără inducție, Q nu poate generaliza sistematic aceste instanțe la propoziții universale. Exemple standard: propoziții ca „pentru orice x, $0 + x = x$" sau „pentru orice x, y, $x + y = y + x$" nu sunt teoreme ale lui Q, dar sunt teoreme în PA.

Aspectul important este că această teorie atinge pragul de expresivitate necesar pentru a „vorbi" în interior despre forme, demonstrații și coduri numerice ale acestora. Astfel, avem în Q:

a) Aritmetizarea sintaxei

Formule, șiruri și demonstrații pot fi codate numeric (numere Gödel). Relațiile „y este codul unei formule" sau „y este codul unei demonstrații în P" sunt primitive recursive; Q are resurse să le descrie prin formule aritmetice.

b) Reprezentabilitate

Fiecare funcție sau relație primitiv recursivă are o reprezentare aritmetică adecvată în Q. În consecință, predicatele de tip „$\text{Dem}_P\ (x)$" („x este codul unei demonstrații în P") pot fi realizate în limbaj aritmetic prin formule de tip existențial.

---

[7] Aritmetica lui Robinson a fost introdusă în 1950, vezi R. M. Robinson, „*An essentially undecidable axiom system*", în *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, Mass., 30 aug.–6 sept. 1950), vol. 1, American Mathematical Society, Providence, 1952, pp. 729–730. Vezi și Alfred Tarski, Raphael M. Robinson, *Essential Undecidability in Arithmetic*, în Alfred Tarski, Andrzej Mostowski, Raphael M. Robinson, *Undecidable Theories*, North-Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam, 1953, pp. 37–75.

[8] În logica matematică putem fixa vocabularul după cum urmează:

Extindere a unei teorii $T' \supseteq T$ (în același limbaj): adăugare de axiome;

Extindere strictă: există cel puțin o formulă F astfel încât $T' \vdash F$, dar $T \nvdash F$;

Extindere conservativă: $T' \supseteq T$, dar nu aduce teoreme noi în limbajul vechi;

Extindere definițională: T′ se obține din T prin adăugarea de simboluri noi împreună cu definiții explicite; este o extindere conservativă, iar definițiile se pot fi eliminate.

c) Posibilitatea de diagonalizare, adică o teorie în care funcționează lema diagonală (despre lema diagonală vom vorbi în secțiunea următoare).

Aritmetica lui Peano[9] (PA) este o extindere strictă a lui Q prin intermediul schemei de inducție: diferența de „putere" este deductivă, nu de limbaj. Limbajul (notat $\mathcal{L}$ (PA)) este același ca în Q și, de asemenea, ne aflăm în același cadru teoretic al logicii de ordinul întâi cu identitate:

$\mathcal{L}$ (PA) = {0, S, +, ·}, în cadrul logicii clasice de ordinul I cu identitate.

Baza aritmetică constă din axiomele lui Q, care funcționează ca o subteorie. Până aici, nu este nimic diferit esențial față de Q. Ceea ce aduce PA în plus este schema de inducție (o notăm IND) pe care o formulăm după cum urmează:

Pentru orice formulă φ(x) din $\mathcal{L}$(PA):

$(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx))) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$, unde x este o variabilă liberă, variabila de inducție propriu-zisă, iar φ poate conține și alți parametri (considerați fixați).

Definiție:

PA = Q + IND. Aritmetica lui Peano este efectiv axiomatizată, iar instanțele de inducție sunt recursiv enumerabile. Spre deosebire de Q, PA nu este finit axiomatizată. Totuși, mulțimea (infinită) a axiomelor este decidabilă – în special, verificarea că o formulă este o instanță a inducției este algoritmică – astfel încât noțiunea de „demonstrația în PA" rămâne complet formalizabilă.

2.4. AUTOREFERINȚA ȘI LEMA DIAGONALĂ

Tradițional, autoreferința era domeniul paradoxurilor logice, precum paradoxul mincinosului. În forma sa cea mai simplă, paradoxul este încapsulat în următoarea propoziție:

M: „Această propoziție este falsă".

Paradoxul apare când încercăm să determinăm dacă M este adevărată sau falsă. Dacă M este adevărată, atunci ceea ce afirmă ea trebuie să fie adevărat. M afirmă că „Această propoziție (M) este falsă". Prin urmare, trebuie să concluzionăm că M este falsă. Acest lucru duce la o contradicție: am pornit de la premisa că M este adevărată și am dedus că este falsă.

Dacă, pe de altă parte, plecăm de la presupoziția că M este falsă, atunci negația a ceea ce afirmă ea trebuie să fie cazul. M afirmă că „Această propoziție (M) este falsă". Negația acestei afirmații este „Această propoziție (M) este adevărată". Prin urmare, trebuie să concluzionăm că M este adevărată. Acest lucru duce, din nou, la o contradicție: am pornit de la premisa că M este falsă și am dedus că este adevărată.

[9] Giuseppe Peano a formulat în 1889, în *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, sistemul axiomatic care îi poartă numele, cu scopul de a oferi o fundamentare axiomatică a aritmeticii numerelor naturale dintr-un număr redus de concepte primitive (numărul inițial — la Peano, 1; funcția de succesor; predicatul „este număr natural") și un set de postulate. În versiunea originală, principiul inducției este exprimat ca o unică axiomă de ordinul al doilea; în prezentarea modernă de ordinul I (PA), inducția apare ca schemă infinită pentru toate formulele limbajului. Am consultat lucrarea în Peano, Giuseppe, „The principles of arithmetic, presented by a new method", in *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, edited by Jean van Heijenoort, 83–97. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

Deoarece ambele ipoteze (că M este adevărată sau că M este falsă) duc la contradicție, propoziția pare să sfideze legile fundamentale ale logicii. Propoziția nu poate să fie nici falsă, nici adevărată. Ne aflăm într-o stare de perpetuă perplexitate. Paradoxul apare când un predicat general de adevăr este aplicat în același limbaj propriei enunțări.

Gödel va transforma această problemă destructivă într-un instrument constructiv, creând enunțuri autoreferențiale care evită contradicția prin înlocuirea conceptului semantic de „adevăr" cu conceptul sintactic de demonstrabilitate. Instrumentul formal care permite unei formule să „se refere la sine" este lema diagonală. Aceasta garantează existența unei propoziții S care afirmă o proprietate despre sine însăși, referindu-se la propriul său număr Gödel ⌜ S ⌝.

Vrem o propoziție S (fără variabile libere) care „vorbește despre sine", în sensul precis:

$P \vdash S \leftrightarrow \varphi(\ulcorner S \urcorner)$,

unde: φ(x) este o formulă dată a limbajului aritmeticii, cu exact o variabilă liberă x (poate avea și alți parametri, considerați fixați); ⌜ S ⌝ este numărul Gödel al lui S; iar P ⊢ … înseamnă „sistemul P (sistemul PM + PA folosit de Gödel) demonstrează …".

Propoziția S este echivalentă în P cu afirmația φ despre propriul ei cod ⌜ S ⌝; în acest sens, putem vorbi despre autoreferință aritmetizată.

Dacă am încerca să scriem direct propoziția „φ(⌜ această propoziție ⌝)", am intra într-un cerc vicios: ca să scriem numeralul numărului Gödel ⌜ S ⌝ în interiorul lui S, trebuie deja să știm ⌜ S ⌝; dar ⌜ S ⌝ depinde de întregul conținut al lui S, inclusiv de acel numeral. Orice modificare a numeralului schimbă propoziția, deci îi schimbă codul, ceea ce cere alt numeral, ș.a.m.d. ajungem la regres *ad infinitum*. Lema diagonală evită acest blocaj: nu cere „potrivirea codurilor de la început", ci construiește un punct fix la nivel de echivalență demonstrabilă în teorie.

Pentru a evita acest regres, folosim o funcție de substituție:

Funcția sub(n, m): primește n = codul unei formule cu o variabilă liberă desemnată x și m = un număr natural; returnează codul formulei obținute din formula cu cod n prin înlocuirea lui x cu numeralul corespunzător lui m, adică $\bar{m}$.

Această funcție este recursivă primitivă, deci reprezentabilă în P: prin urmare, există formule aritmetice SUB(u, v, w) care o exprimă corect, iar P demonstrează pe instanțe numerale existența și unicitatea rezultatului. SUB(u, v, w) este o formulă cu trei variabile libere (u, v, w) care este adevărată dacă și numai dacă w este numărul Gödel al formulei obținute prin substituirea variabilei libere x cu numeralul $\bar{v}$ în formula cu codul u[10].

Avem acum la dispoziție proprietatea φ(x) și funcția sub(n, m) (reprezentată în P de formula SUB(u, v, w)), pe care le asamblăm pentru a construi propoziția finală S și a garanta diagonalizarea.

---

[10] Legătura cu sub(n, m) (funcția meta) este următoarea: pentru toate n, m, dacă z = sub(n, m) la metanivel, atunci $P \vdash SUB(\bar{n}, \bar{m}, \bar{z})$. Aritmetica poate „citi" un text formal (prin codul lui), poate „scrie" un numeral, poate face substituție ca într-un editor de text și poate „închide la loc" totul într-un număr. SUB(u, v, w) este exact descrierea numerică a acestei operații de editare sintactică.

Construcția punctului fix (Propoziția S) se realizează astfel:

Pornind de la proprietatea φ(x), construim o nouă formulă, pe care o vom numi ψ(x), care are o singură variabilă liberă, x. Această formulă descrie o proprietate complexă:

$\psi(x) \equiv \exists z\ (SUB(x, x, z) \wedge \varphi(z))$

Să traducem ce spune ψ(x): „*Există un număr z, astfel încât z este numărul Gödel al formulei obținute prin luarea formulei cu codul x și substituirea variabilei libere din ea cu numeralul corespunzător codului lui x, iar formula cu codul z are proprietatea φ*."

Mai simplu, ψ(x) spune: „Rezultatul substituției formulei cu codul x are proprietatea φ."

Acum calculăm numărul Gödel al acestei formule:

Formula ψ(x) pe care tocmai am construit-o este un șir finit de simboluri. Ca orice altă formulă, are propriul ei număr Gödel. Să notăm acest număr cu h.

$h = \ulcorner\ \psi(x)\ \urcorner = \ulcorner\ \exists z\ (SUB(x, x, z) \wedge \varphi(z))\ \urcorner$

h este un număr natural specific și constant.

În sfârșit, construim propoziția S luând formula ψ(x) (al cărei cod este h) și substituind în ea variabila liberă x cu numeralul care corespunde numărului h.

$S \equiv \psi(\bar{h})$

Dacă explicităm definiția, propoziția S este:

$S \equiv \exists z\ (SUB(\bar{h}, \bar{h}, z) \wedge \varphi(z))$

Am obținut o propoziție S care, la prima vedere, vorbește despre un număr fix h. Să vedem însă ce demonstrează sistemul P despre S. Ce calculează sub(h, h)? Conform definiției funcției sub, sub(h, h) ia formula cu codul h (adică ψ(x)) și substituie în ea variabila x cu numeralul $\bar{h}$. Rezultatul este, prin însăși construcția noastră, propoziția S. Prin urmare, valoarea numerică a lui sub(h, h) este exact numărul Gödel al lui S.

$sub(h, h) = \ulcorner\ S\ \urcorner$

Deoarece SUB reprezintă sub în P, sistemul poate demonstra formal acest calcul. P poate demonstra că singurul z care satisface $SUB(\bar{h}, \bar{h}, z)$ este chiar $\ulcorner\ S\ \urcorner$.

$P \vdash \forall z\ (SUB(\bar{h}, \bar{h}, z) \leftrightarrow z = \ulcorner\ S\ \urcorner)$

$S \equiv \exists z\ (SUB(\bar{h}, \bar{h}, z) \wedge \varphi(z))$

Datorită a ceea ce P poate demonstra, putem substitui $SUB(\bar{h}, \bar{h}, z)$ cu $z = \ulcorner\ S\ \urcorner$ în interiorul demonstrației. Astfel, P poate demonstra că S este echivalent cu:

$\exists z\ (z = \ulcorner\ S\ \urcorner \wedge \varphi(z))$,

ceea ce este, evident, echivalent cu:

$\varphi(\ulcorner\ S\ \urcorner)$

În concluzie, S realizează autoreferința aritmetizată: ea nu conține „literal" propriul său număr Gödel ($\ulcorner\ S\ \urcorner$), ci conține numeralul lui h (codul formulei-șablon ψ(x)), aranjat într-o structură care descrie modul de calcul al lui $\ulcorner\ S\ \urcorner$. Astfel, P demonstrează echivalența $S \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\ S\ \urcorner)$, iar S ajunge să afirme că ea însăși are proprietatea φ. Aceasta este esența lemei diagonale.

2.5. PROPOZIȚIA G

Construcția propoziției G este, în principal, o aplicare directă a lemei diagonale asupra unei proprietăți specifice, anume proprietatea de a nu fi demonstrabil.

Mai întâi, definim predicatul de demonstrabilitate. Deoarece noțiunea „y este codul unei demonstrații în P a formulei cu codul x" este recursivă primitivă, putem defini în limbajul aritmetic un predicat $Dem_P(x)$:

$Dem_P(x) \equiv \exists y\ Demst_P(y, x)$,

unde $Demst_P(y, x)$ este un predicat binar care formalizează relația sintactică „y este numărul Gödel al unei demonstrații valide în P pentru formula cu numărul Gödel x"; iar $Dem_P(x)$ este un predicat unar care exprimă proprietatea existențială „formula cu codul x este demonstrabilă".

Proprietatea care ne interesează este negația acestui predicat, adică nedemonstrabilitatea:

$\neg Dem_P(x)$

Aceasta este formula φ(x) pe care o vom folosi. Este o formulă aritmetică bine formată, cu o singură variabilă liberă, x.

Acum luăm această proprietate specifică și o introducem în „mașinăria" lemei diagonale. Lema diagonală ne garantează că, pentru orice formulă φ(x), există o propoziție S astfel încât

$P \vdash S \leftrightarrow \varphi(\ulcorner S \urcorner)$.

În cazul nostru, φ(x) este $\neg Dem_P(x)$. Prin urmare, lema diagonală garantează existența unei propoziții, pe care o vom numi G, cu proprietatea:

$P \vdash G \leftrightarrow \neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$

Să „traducem" în limbaj natural această echivalență demonstrabilă:

Partea stângă este propoziția G. Partea dreaptă, $\neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$, afirmă că „propoziția cu numărul Gödel $\ulcorner G \urcorner$ nu este demonstrabilă în sistemul P". Deoarece propoziția cu numărul Gödel $\ulcorner G \urcorner$ este însăși propoziția G, echivalența de mai sus înseamnă că G este o propoziție care afirmă despre sine că nu este demonstrabilă în sistemul P:

G: „Propoziția cu numărul Gödel $\ulcorner G \urcorner$ nu este demonstrabilă în sistemul P."

Aceasta este celebra propoziție G a lui Gödel. Așa cum vom vedea în continuare, ea nu este un paradox; dimpotrivă, propoziția G va fi piesa centrală în demonstrarea primei teoreme de incompletitudine, care se bazează pe analiza a ceea ce poate și a ceea ce nu poate demonstra P despre G.

2.6. PRIMA TEOREMĂ DE INCOMPLETITUDINE

Demonstrația este un argument care analizează statutul propoziției G în P. Avem deja $P \vdash G \leftrightarrow \neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$ și presupunem că sistemul P este consistent; consistența sistemului este o premisă-cheie în argumentare[11]. Ce rezultă acum din faptul că avem propoziția G în sistem?

[11] În lucrarea sa din 1931, Gödel a folosit ω-consistența (o condiție mai puternică, ce afirmă că o teorie nu poate demonstra $\exists x\ \varphi(x)$ și, simultan, să demonstreze $\neg\varphi(\bar{n})$ pentru fiecare număr natural n), dar în 1936, J.B. Rosser a generalizat demonstrația pentru consistența simplă. Vezi J. B. Rosser, „Extensions of Some Theorems of Gödel and Church", *The Journal of Symbolic Logic* 1, no. 3 (Septembrie 1936), p. 87: „We shall say that a logic is „simply consistent" if there is no formula A such that both A and -A are provable."

Să presupunem, prin reducere la absurd, că G este demonstrabilă în P. Adică:

$P \vdash G$

Din construcția lui G, știm că:

$P \vdash G \leftrightarrow \neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$

Prin urmare, dacă $P \vdash G$, atunci rezultă că $P \vdash \neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$. Pe de altă parte, dacă P demonstrează G, atunci faptul că G este demonstrabilă este el însuși un fapt demonstrabil în P[12], ceea ce înseamnă că $P \vdash Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$. Astfel, am ajuns la o contradicție formală: sistemul P ar demonstra atât $Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$, cât și negația sa, $\neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$.

În concluzie, dacă P este consistent, atunci G nu este demonstrabilă în P. Altfel spus:

Dacă P este consistent, atunci $P \nvdash G$.

Aceasta este prima parte a teoremei: G nu este demonstrabilă.

Pentru a completa imaginea incompletitudinii, să arătăm că nici negația lui G nu este demonstrabilă. Presupunem, din nou prin reducere la absurd, că ¬G este demonstrabilă în P.

$P \vdash \neg G$.

Din construcție, ¬G echivalează cu $Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$. Așadar, presupunerea noastră înseamnă că $P \vdash Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$, adică $P \vdash \exists y\, Demst_P(y, \ulcorner G \urcorner)$. Totuși, din prima parte știm că nu există nicio demonstrație a lui G. Acest fapt poate fi arătat în P pentru fiecare caz individual: P poate demonstra $\neg Demst_P(\bar{0}, \ulcorner G \urcorner)$, $\neg Demst_P(\bar{1}, \ulcorner G \urcorner)$ etc., pentru fiecare numeral $\bar{n}$, deoarece $Demst_P$, fiind recursiv primitiv, este reprezentabil în P. Prin urmare, sistemul demonstrează $\exists y\, \varphi(y)$, dar și $\neg\varphi(\bar{n})$ pentru fiecare n, ceea ce contrazice direct definiția ω-consistenței. Prin urmare, dacă P este ω-consistent, se ajunge la o contradicție.

În concluzie, dacă P este ω-consistent, atunci nici ¬G nu este demonstrabilă în P. Sistemul P nu poate decide propoziția G în niciun sens – aceasta este indecidabilă în P.

Suntem acum în măsură să enunțăm prima teoremă de incompletitudine:

Pentru orice teorie formală P care este ω-consistentă, efectiv axiomatizabilă și suficient de puternică pentru a reprezenta aritmetica (i.e., conține cel puțin Q), există o propoziție G a limbajului său astfel încât nici G, nici negația sa ¬G nu sunt demonstrabile în P.

Pe scurt, un astfel de sistem este în mod necesar incomplet.

Acum, să arătăm că G este, totuși, adevărată. Adevărul lui G depinde de interpretarea semantică în modelul standard al aritmeticii ($\mathbb{N}$, cu operațiile obișnuite). Din demonstrația de mai sus, știm că G nu este demonstrabilă în P (sub asumarea consistenței). Dar G tocmai afirmă $\neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$, adică „G nu este demonstrabilă". Prin urmare, afirmația lui G corespunde realității: ea este într-adevăr nedemonstrabilă, deci G este adevărată.

---

[12] Aceasta este o proprietate a predicatului Dem_P, care decurge din faptul că relația de demonstrație $Demst_P$ este primitiv recursivă și deci reprezentabilă. De aici urmează internalizarea demonstrațiilor: dacă $P \vdash S$, atunci $P \vdash DemP(\ulcorner S \urcorner)$. Există un cod x al demonstrației lui S; cum $Demst_P$ este primitiv recursivă și reprezentabilă, $P \vdash Demst_P(\bar{x}, \ulcorner S \urcorner)$, deci $P \vdash \exists y\, Demst_P(y, \ulcorner S \urcorner)$, adică $P \vdash Dem_P(\ulcorner S \urcorner)$ – acest fapt se obține în teorii care conțin cel puțin Q.

Deoarece nu există nicio demonstrație în P pentru G (altfel am avea contradicție), predicatul $Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$ este fals în $\mathbb{N}$, deci $\neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$ este adevărat, ceea ce înseamnă că G este adevărată.

Cu alte cuvinte, metateoretic, sub consistență, nu există demonstrație a lui G în P; deci propoziția aritmetică $Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$ este falsă în $\mathbb{N}$, iar $\neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$ este adevărată. Cum G este echivalentă cu $\neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$, rezultă că G este adevărată, dar nedemonstrabilă în P.

Astfel, G este o propoziție adevărată, dar nedemonstrabilă în P, ceea ce constituie un exemplu concret de incompletitudine în P.

2.7. A DOUA TEOREMĂ DE INCOMPLETITUDINE

După prima teoremă de incompletitudine, care arată că în orice sistem formal consistent și suficient de puternic există propoziții (adevărate în modelul standard N, metateoretic), dar indecidabile (precum propoziția G), trecem la a doua teoremă. Aceasta se obține combinând rezultatul primei teoreme cu formalizarea internă a demonstrabilității (condițiile Hilbert–Bernays–Löb)[13] și afirmă că, dacă un astfel de sistem P este consistent, atunci propoziția care exprimă consistența lui P (notată Con(P)) nu poate fi demonstrată în interiorul lui P. Cu alte cuvinte, niciun sistem formal nu poate dovedi propria sa consistență folosind doar resursele sale interne – o lovitură și mai profundă pentru programul lui Hilbert de a fundamenta matematica pe baze absolut sigure[14].

O enunțăm astfel:

Fie P o teorie (precum PA) care satisface condițiile primei teoreme. Fie Con(P) o propoziție aritmetică ce exprimă consistența lui P. În aceste condiții:

Dacă P este consistent, atunci $P \nvdash Con(P)$.

---

[13] Acest pas, formalizarea demonstrației primei teoreme în P, se bazează pe faptul că predicatul de demonstrabilitate $Dem_P(x)$ satisface un set de condiții tehnice, numite condițiile de derivabilitate Hilbert-Bernays-Löb (notate HBL). Acestea garantează că $Dem_P(x)$ se comportă, în interiorul sistemului, așa cum ne-am aștepta să se comporte un predicat de demonstrabilitate.

Cele trei condiții principale sunt:

1. Dacă $P \vdash F$, atunci $P \vdash Dem_P(\ulcorner F \urcorner)$.

(Dacă o propoziție este demonstrabilă, sistemul P poate demonstra faptul că este demonstrabilă).

2. $P \vdash Dem_P(\ulcorner F \to G \urcorner) \to (Dem_P(\ulcorner F \urcorner) \to Dem_P(\ulcorner G \urcorner))$

(P „știe” că demonstrabilitatea este închisă sub regula Modus Ponens).

3. $P \vdash Dem_P(\ulcorner F \urcorner) \to Dem_P(\ulcorner Dem_P(\ulcorner F \urcorner) \urcorner)$

(P poate demonstra prima condiție despre sine însuși).

Sisteme precum Aritmetica lui Peano (PA) satisfac aceste condiții, permițând astfel demonstrarea celei de-a doua teoreme de incompletitudine.

Pentru condițiile Hilbert-Bernays-Löb, vezi Peter Smith, *An Introduction to Gödel's Theorems*, ed. a II-a, CUP/Logic Matters, 2013/2020 – cap. 33, §33.2 („The Hilbert–Bernays–Löb derivability conditions”, pp. 246–248)

[14] Această teoremă distruge speranța de a dovedi consistența matematicii folosind metode finitiste (cum dorea Hilbert). Pentru a dovedi Con(P), trebuie să apelăm la un sistem mai puternic P', dar atunci Con(P') devine nedemonstrabilă în P' și așa mai departe – o ierarhie infinită de dovezi. De exemplu, consistența aritmeticii Peano poate fi dovedită în teoria mulțimilor ZFC, dar consistența ZFC necesită axiome și mai puternice ș.a.m.d.

Această teoremă subliniază limitările reflexive ale sistemelor formale: ele nu pot „să se verifice pe sine” în mod complet. Vom prezenta construcția și demonstrația într-un stil similar cu cel al primei teoreme. Vom presupune același sistem P, ω-consistent și capabil să exprime aritmetica elementară.

Distingem între consistență semantică și sintactică. În sens semantic, P este consistent dacă are un model, iar în sens sintactic, P este consistent dacă nu demonstrează o contradicție formală, adică nu există demonstrație în P pentru o formulă precum 0 = 1 (sau orice altă contradicție evidentă). A doua teoremă se referă la consistența sintactică, formalizată în limbajul P.

Vom începe prin a formaliza ideea de consistență: folosim codificarea Gödel și definim o propoziție aritmetică Con(P) care exprimă „P nu demonstrează contradicții”. Vom nota această propoziție Con(P) și o vom defini în continuare mai precis astfel:

$\mathrm{Con}(P) \equiv \neg \mathrm{Dem}_P(\ulcorner\, 0 = 1 \,\urcorner)$,

unde $\mathrm{Dem}_P(x)$ este predicatul de demonstrabilitate $\exists y\, \mathrm{Demst}_P(y, x)$, ca în prima teoremă, iar $\ulcorner\, 0 = 1 \,\urcorner$ este numărul Gödel al formulei contradictorii „0 = 1”. Aceasta înseamnă: „Nu există demonstrație în P pentru 0 = 1”. (Putem folosi orice contradicție formală; 0 = 1 este un exemplu standard.) Con(P) este exprimabilă în P deoarece implică doar relații aritmetice asupra numerelor Gödel.

Această formalizare permite sistemului să „vorbească” despre propria sa consistență, similar cu autoreferința din G. A doua teoremă rezultă din faptul că, în P, se demonstrează $\mathrm{Con}(P) \rightarrow G$ (folosind condițiile Hilbert–Bernays–Löb), împreună cu nedemonstrabilitatea lui G sub consistență din prima teoremă. Din construcția primei teoreme, știm că:

$G \equiv \neg \mathrm{Dem}_P(\ulcorner\, G \,\urcorner)$ (sau, echivalent, $\forall y\, \neg \mathrm{Demst}_P(y, \ulcorner\, G \,\urcorner)$).

Demonstrația nedemonstrabilității lui G arată că, dacă $P \vdash G$, atunci P ar demonstra o contradicție.

Mai mult, Gödel a arătat că demonstrația primei teoreme poate fi formalizată în sistemul P însuși – cu alte cuvinte, P poate „demonstra” că dacă P este consistent, atunci G nu este demonstrabilă. Formal:

$P \vdash (\mathrm{Con}(P) \rightarrow \neg \mathrm{Dem}_P(\ulcorner\, G \,\urcorner))$.

Dar deoarece $G \equiv \neg \mathrm{Dem}_P(\ulcorner\, G \,\urcorner)$, rezultă că $P \vdash (\mathrm{Con}(P) \rightarrow G)$, iar din aceasta rezultă teorema a doua:

Din $P \vdash \mathrm{Con}(P) \rightarrow G$ și din nedemonstrabilitatea lui G sub consistență (cum avem deja din prima teoremă) rezultă $P \nvdash \mathrm{Con}(P)$. Cu alte cuvinte, dacă P ar putea demonstra propria sa consistență, atunci ar putea demonstra și propoziția G, ceea ce contrazice prima teoremă.

În concluzie, dacă P este consistent, atunci $P \nvdash \mathrm{Con}(P)$. Mai mult, dacă P este ω-consistent, nici $\neg \mathrm{Con}(P)$ nu este demonstrabilă. Dacă ar fi, P ar demonstra existența unei demonstrații a unei contradicții. Astfel, propoziția Con(P) este indecidabilă în P și, similar cu G, este o propoziție adevărată (deoarece am presupus că P este consistent), dar nedemonstrabilă în interiorul sistemului pe care îl descrie.

2.8. DOUĂ ÎNTREBĂRI DESPRE INCOMPLETITUDINE ȘI INDECIDABILITATE

1) Este incompletitudinea evitabilă pentru alte sisteme recursiv axiomatice capabile să exprime aritmetica? Poate că suntem în această situație din cauza unui defect intrinsec al sistemului nostru, dar alte sisteme, construite cu mai multă atenție, ar putea evita incompletitudinea.

Răspunsul este negativ: de câte ori avem un sistem formal suficient de puternic (de exemplu, aritmetica lui Robinson – Q), putem construi propoziția G. Avem nevoie doar de elementele formale de la care să pornim numerotarea Gödel..

Adăugarea propoziției G ca axiomă nu rezolvă problema, întrucât putem genera o nouă propoziție G' pentru noul sistem extins, iar procesul se repetă la infinit. Noul sistem obținut, P' = P + G, este, la rândul său, consistent și efectiv axiomatizabil. Prin urmare, putem reaplica întreaga mașinărie a argumentului lui Gödel pentru a construi o nouă propoziție, G', care afirmă propria sa nedemonstrabilitate în P'. G' va fi nedemonstrabilă în P', deși este adevărată. Acest proces poate fi repetat la infinit, generând o ierarhie nesfârșită de sisteme și de adevăruri nedemonstrabile.

Incompletitudinea este, așadar, inevitabilă: niciun sistem formal consistent și efectiv axiomatizabil, suficient de puternic să exprime aritmetica, nu poate fi complet.

2) Există propoziții indecidabile în mod absolut?

Teoremele de incompletitudine nu implică existența unor propoziții indecidabile în mod absolut, pentru care este demonstrat cu certitudine că vor rămâne în afara posibilității umane de cunoaștere. Indecidabilitatea este întotdeauna relativă la un anumit sistem formal.

Propoziția G_P este nedemonstrabilă în P, dar, așa cum am văzut mai sus, în sistemul mai puternic P' = P + G_P, propoziția G_P devine o axiomă și, prin urmare, este perfect demonstrabilă. Desigur, P' va avea propria sa propoziție indecidabilă, G', care la rândul ei poate fi decisă într-un sistem și mai puternic, P'' = P' + G' și așa mai departe.

O propoziție de tip Gödel, G, este indecidabilă în P (nici G , nici ¬G nu sunt demonstrabile în P). Ea devine demonstrabilă într-o extensie mai puternică T, de îndată ce T poate dovedi Con(P). De exemplu, în ZFC putem demonstra ⊢Con(PA), deci în ZFC putem demonstra propoziția G construită în PA.

Prin urmare, teoremele lui Gödel nu impun o limită cunoașterii în sens absolut. Ele nu afirmă existența unor adevăruri pe care mintea umană nu le poate atinge. Ceea ce limitează ele este puterea unui sistem formal fixat de a captura întregul adevăr din propriul său domeniu. Limita este a formalizării, nu a adevărului sau gândirii. Așadar, concluzia nu este despre limitele gândirii, ci despre limitele axiomatizării mecanice.

3. *TRACTATUS-UL* ȘI TEOREMELE DE INCOMPLETITUDINE: BIPOLARITATE, REPREZENTABILITATE, AUTOREFERINȚĂ

3.1. PRELIMINARII: FREGE, *PRINCIPIA MATHEMATICA*, HILBERT ȘI CĂUTAREA FUNDAMENTELOR

La trecerea dintre secolele XIX și XX, problema comună a principalelor programe de fundamentare a matematicii – logicismul fregean, proiectul *Principia Mathematica* și formalismul hilbertian – era obținerea unui cadru formal riguros în care conținutul matematic să fie reprezentat fără ambiguități, iar statutul propozițiilor să fie determinat de reguli explicite de inferență. Pe acest fundal, optimismul privind puterea formalizării coexistă cu dificultăți care vor fi clarificate abia prin rezultatele metalogice ale lui Gödel din 1931.

Frege formulează varianta canonică a logicismului[15]: aritmetica trebuie derivată din legi logice și definiții pur logice într-un limbaj formal adecvat (cu cuantificatori și funcții). „Versiunea tare" a logicismului susține că orice propoziție aritmetică adevărată este, în principiu, deductibilă logic; „versiunea slabă" restrânge pretenția la aritmetică. Motivația centrală este decuplarea justificării aritmeticii de la apelul la intuiția kantiană și înlocuirea ei cu o fundamentare strict formală și logică. În cuvintele lui Russell din prefața la prima ediție a cărții *The Principles of Mathematics*, logicismul susține că „toată matematica pură tratează exclusiv concepte definibile în termenii unui număr foarte mic de concepte logice fundamentale și că toate propozițiile ei sunt deductibile dintr-un număr foarte mic de principii logice fundamentale."[16]

Criza internă survine în 1902: când Russell arată că în interiorul sistemului lui Frege se găsește un paradox, ceea ce impune restricții asupra formării extensiunilor conceptelor. Ca răspuns, Russell și Whitehead dezvoltă *Principia Mathematica* (1910–1913), introducând teoria tipurilor ca mecanism ierarhic anti-autoreferențial și de limitare a comprehensiunii. Ținta era păstrarea ambiției logiciste – derivarea matematicii din principii logice – sub constrângeri sintactice care exclud paradoxurile.

În paralel, David Hilbert, unul dintre cei mai mari matematicieni ai epocii, a propus o abordare diferită, dar la fel de ambițioasă. Pentru Hilbert, matematica era, în esență, un joc formal cu simboluri lipsite de semnificație intrinsecă. Important era ca regulile acestui joc să fie bine definite și, mai presus de orice, să fie sigure. Programul lui Hilbert avea două obiective strategice: (1) formalizarea completă a matematicii într-un sistem axiomatic și (2) demonstrarea finitistă a consistenței acestui sistem. Instrumentul pentru a atinge primul obiectiv era metoda axiomatică, iar un sistem rezultat era considerat ideal dacă avea proprietățile de completitudine (negațională) și independență a axiomelor.

---

[15] Despre logicism, vezi William Demopoulos, *Logicism and its Philosophical Legacy*, 2013. Vezi și Paul C Gilmore, *Logicism Renewed*, Cambridge University Press, 2016.

[16] Bertrand Russell, *The Principles of Mathematics*, Second Edition, George Allen and Unwin Ltd, London, 1937, „The preface".

Consistență: sistemul trebuie să fie liber de contradicții. Din axiomele sale nu trebuie să se poată demonstra niciodată o propoziție și negația ei (de exemplu, A și non-A). Acesta era standardul minim acceptat. Hilbert insista ca dovada consistenței să fie realizată prin mijloace finitiste și axiomatice riguroase. Formal: $\neg\exists F\ (T \vdash F \wedge T \vdash \neg F)$

Completitudine: sistemul trebuie să fie complet negațional dacă, pentru orice propoziție închisă F din limbajul său, teoria poate demonstra fie propoziția, fie negația ei[17]. Formal: $\forall F\ (T \vdash F \vee T \vdash \neg F)$

Independența: O axiomă A dintr-un set de axiome S este independentă dacă A nu este derivabilă din celelalte axiome S - {A}. Formal: $(S - \{A\}) \nvdash A$. Un sistem de axiome este independent dacă fiecare axiomă a sa este independentă.

În esență, Hilbert urmărea un cadru axiomatic care să ofere certitudine formală și, ideal, mijloace efective, mecanice pentru rezolvarea problemelor din interiorul sistemului.

Deși s-a distanțat față de proiectul logicist al lui Russell și Whitehead, Hilbert a tratat *Principia Mathematica* drept un reper tehnic pentru dezvoltarea metamatematicii. După 1914, colaboratorii săi (în special Bernays) au studiat pe larg PM, iar Hilbert a reluat chestiunile de fundamentare având acest cadru în minte[18]. *Principia Mathematica* a fost un pas înainte pentru infrastructura logică a programului său; Hilbert a recunoscut *Principia* ca un pas important, dar nu soluția finală.

La fel ca Hilbert, Wittgenstein a reacționat puternic la *Principia Mathematica*: mulți comentatori ai *Tractatus-ului* consideră că respingerea teoriei tipurilor stă în centrul preocupărilor sale timpurii și a contribuit decisiv la cristalizarea ideilor care au dus la *Tractatus*[19]. Aceste paralele apar pe fundalul ambițiilor de la începutul secolului XX: *Principia* urmărea o axiomatizare integrală a matematicii, iar Hilbert – o fundamentare finitistă, consistentă și completă (negațional) a matematicii. Ambele proiecte presupuneau, într-un anumit sens, suficiența formalizării. Atât Wittgenstein, cât și Gödel își formulează răspunsurile în acest mediu teoretic comun și influențează decisiv evoluția logicii, matematicii și filosofiei.

Tractatus-ul lui Wittgenstein poate fi citit ca un răspuns filosofic la această ambiție: încercarea de a exprima condițiile de posibilitate ale sensului din interiorul limbajului este sortită eșecului; ceea ce ține de forma logică nu poate fi spus cu sens. Demersul lui Gödel, la rândul lui, este demonstrația tehnică a faptului că sistemele formale nu pot atinge țintele fixate de Hilbert. Construind o propoziție indecidabilă și dovedind imposibilitatea demonstrațiilor interne ale consistenței, Gödel arată o

[17] Completitudinea negațională de mai sus este o proprietate a teoriei. Completitudinea logicii de ordinul întâi, demonstrată de Gödel în 1930, este o problemă diferită care consta în a arată că orice consecință semantică este derivabilă sintactic, dacă $\vDash F$, atunci $\vdash F$. Această proprietate aparține sistemului deductiv, nu unei teorii matematice.

[18] Împreună cu asistentul său Paul Bernays, Hilbert a publicat în 1928 o lucrare despre fundamentele logicii *Grundzüge der theoretischen Logik (traducere engleză: Principles of Mathematical Logic)*

[19] Vezi, de exemplu, P.M.S. Hacker, *Insight and Illusion*,1987 p. 12: (...) his repudiation of the Theory of Types played a major role in moulding his conception of the nature and limits of philosophy, from the 'Notes on Logic' of 1913 to the *Tractatus*; Anthony Kenny, *Wittgenstein*, Revised Edition, 2006. p.41: One strand … was the dismantling of the logical system of *Principia Mathematica.*

limită analoagă intuiției filosofice wittgensteiniene. Ambele rezultate pun în lumină limitele interne ale unui sistem privind ceea ce poate exprima și demonstra despre propriile sale fundamente.

3.2. BIPOLARITATE ȘI REPREZENTABILITATE

În *Tractatus*, bipolaritatea este o condiție a sensului: o propoziție are sens numai dacă are capacitatea de a fi atât adevărată, cât și falsă. Aceasta decurge din teoria imaginii: propoziția este imaginea logică a unei stări posibile de lucruri, iar posibilitatea alternativelor îi dă sensul. Condiția nu este un simplu test pragmatic, ci exprimă însăși ideea de reprezentare: o propoziție „stă în locul" unei stări de lucruri posibile, iar posibilitatea falsității ei constituie reversul aceleiași capacități de a descrie lumea. Consecința importantă este că sensul precede verificarea și chiar adevărul: fără bipolaritate, nu există niciun „ceva" care să fie ulterior confirmat sau infirmat. Din această perspectivă, teoria propoziției ca imagine funcționează ca o teorie a reprezentării[20]: ceea ce este cu sens se definește prin aptitudinea de a reprezenta o situație posibilă, ceea ce exclude la rândul său încercarea de a reprezenta însăși forma comună a reprezentării.

În demonstrația incompletitudinii, reprezentabilitatea joacă un rol analog, dar într-un registru diferit: nu mai e vorba de reprezentarea lumii de către propoziții, ci de reprezentarea în interiorul sistemului a discursului despre el însuși. Aritmetizarea sintaxei permite ca propoziții metateoretice – despre ce se demonstrează în sistem, despre existența sau inexistența unor demonstrații – să fie exprimate ca propoziții aritmetice în PA. Reprezentabilitatea este, astfel, condiția tehnică prin care discursul despre sistem este internalizat sub forma unui discurs în sistem. Fără această trecere, construcția propoziției indecidabile nu ar fi posibilă.

În ambele cazuri, avem un criteriu de admisie: în *Tractatus*, o propoziție intră în sfera sensului dacă trece testul bipolarității; în demonstrația lui Gödel, o propoziție despre sistem intră în sfera expresibilului intern dacă proprietatea metateoretică pe care o afirmă poate fi reprezentată în limbajul aritmetic al sistemului. Ambele criterii funcționează drept porți de acces, iar în ambele cazuri ceea ce rămâne dincolo de poartă nu este „fals" în sens obișnuit, ci este nelegitim în sistem: în *Tractatus*, nonsensul; în meta-aritmetică, tot ce este neinternalizat (ce are nevoie de un metalimbaj mai bogat).

Analogiei îi corespunde și o deosebire esențială: bipolaritatea în *Tractatus* este o condiție necesară a inteligibilității, parte a unui cadru semantic mai amplu[21], pe

[20] Vezi Michael Potter, „The Logic of the *Tractatus*", în *Handbook of the History of Logic*, volume 5, *Logic from Russell to Church*, pp. 255–304: „the method of the *Tractatus* is neither to deduce the structure of our language from that of the world of which it attempts to speak nor, conversely, to deduce the structure of the world from that of language, but rather to deduce the structure of both from the necessary representing relationship between them", p. 255.

[21] Criteriul semantic este, în *Tractatus*, mai complex și implică:

Bipolaritatea – propoziția poate fi adevărată sau falsă.

Figurativitatea – propoziția este o imagine a realității.

Izomorfismul propoziție – stare de lucruri.

În cazul propozițiilor compuse: compoziționalitate – sensul întregului rezultă din sensul elementelor componente și din modul lor de combinare.

când reprezentabilitatea la Gödel este un criteriu metateoretic al exprimabilului intern (contează capacitatea de a exprima noțiuni metateoretice în limbajul aritmetic). În ambele cazuri, însă, „condiția de posibilitate" pregătește scena pentru un rezultat de limită: la Wittgenstein, limita a ceea ce poate fi spus apare din structura sensului; la Gödel, limitele a ceea ce poate fi demonstrat apar din posibilitatea de a vorbi despre demonstrație chiar în interiorul teoriei.

Statutul propozițiilor matematice merită o precizare. La Wittgenstein ele apar în ultimă instanță drept reguli de calcul, lipsite de conținut descriptiv; la Gödel, ele pot relata adevăruri despre numere, demonstrații etc. În pofida acestei diferențe, parcursul logic urmează un tipar comun: de la stabilirea condițiilor de posibilitate (bipolaritate/reprezentabilitate) se ajunge la descoperirea limitelor (inexprimabil/ nedemonstrabil), în ambele cazuri, prin construcția unui punct fix – o propoziție care se aplică sieși. Acest punct fix devine, în mod inevitabil, un „punct orb" pentru sistem. La Wittgenstein, momentul este 6.54, când *Tractatus* își declară propriile enunțuri nonsensuri; la Gödel, este propoziția G, care, vorbind despre propria sa demonstrabilitate, devine nedemonstrabilă. Astfel, atât argumentul lui Wittgenstein, cât și rezultatele lui Gödel indică aceeași idee: orice sistem de reprezentare conține puncte oarbe; există întotdeauna ceva ce rămâne „pe dinafară", ceva ce nu poate fi capturat în interiorul sistemului.

3.3. MECANISMUL AUTOREFERENȚIAL: PROPOZIȚIA 6.54 *VS* PROPOZIȚIA G

Mecanismul prin care *Tractatus* ajunge la propria sa limită este autoreferința. Deși limbajul este capabil să descrie faptele prin oglindirea structurii lor, chiar condițiile care fac posibilă reprezentarea nu pot, ele însele, să fie reprezentate în limbaj. Ele se pot doar arăta, nu spune. O propoziție nu poate spune despre sine ceea ce, în cel mai bun caz, se arată în felul în care ea reprezintă.

În *Tractatus*, o propoziție cade în una din trei categorii: (a) descrie o stare de lucruri și are sens; (b) este o tautologie sau o contradicție – în acest caz, ține de logică și este lipsită de sens sau (c) încearcă să spună ceea ce poate doar să se arate și, în consecință, este nonsens. Orice propoziție cu sens este o imagine, iar orice imagine este logică[22]; astfel, bipolaritatea este o condiție a ceea ce intră cu drepturi depline în sfera sensului. Structura limbajului prezentată în *Tractatus* garantează o formă semantică de consistență: bipolaritatea asigură că, pentru orice stare a lumii, setul propozițiilor adevărate care o descriu este necesar consistent: dacă p este adevărată, atunci ¬p este falsă; cele două nu pot fi simultan adevărate. Mai mult, sistemul exclude construcții autoreferențiale paradoxale și poate fi citit ca o demontare treptată a iluziilor create prin încercări de a spune ceea ce doar se arată – probleme care devin acute în cazul autoreferinței. O propoziție de tipul „această propoziție este falsă" ar încălca bipolaritatea și astfel este eliminată. Prin urmare, versiunea idealizată a limbajului prezentată în *Tractatus* nu permite inconsistență semantică în descrierea realității.

[22] Orice imagine este una logică (TLP 2.18).

Unde încadrăm propozițiile autoreferențiale? Autoreferința marchează chiar această limită: o propoziție de tipul „această propoziție este o imagine” încearcă să exprime raportul de proiecție (forma logică comună) – adică tocmai condiția inteligibilității – și, prin urmare, nu aparține limbajului cu sens. O astfel de propoziție nu este bipolară și nu descrie nicio stare de lucruri. Mai mult, nu este o tautologie; nu aparține logicii. Prin urmare, nu poate fi decât nonsens.

O propoziție cu sens poate face referință la orice – cu excepția ei înseși ca propoziție. În acest sens, *Tractatus* poate fi citit ca o demontare treptată a iluziilor create prin încercări de a spune ceea ce doar se arată – probleme care devin acute în cazul autoreferinței. Demersul culminează cu propoziția 6.54, care spune:

> „*Propozițiile mele clarifică prin faptul că cel ce mă înțelege le recunoaște, în cele din urmă, drept nonsensuri, dacă prin ele – sprijinindu-se pe ele – s-a ridicat deasupra lor. (El trebuie, pentru a spune așa, să arunce scara după ce a urcat pe ea.)*
> *El trebuie să depășească aceste propoziții și apoi vede lumea în mod corect*.”

Un deceniu mai târziu, Gödel își dezvoltă demonstrația pe baza aceleiași noțiuni de limită și a problematicii autoreferinței, folosind tehnica codificării care îi poartă numele. Prima teoremă a incompletitudinii afirmă că, în orice sistem formal efectiv axiomatizabil P, suficient de expresiv pentru a formula aritmetica de bază, există o propoziție G care spune despre sine că nu este demonstrabilă în P. Dacă P este consistent, G este adevărată (în modelul standard N), dar nedemonstrabilă; dacă G ar fi demonstrabilă, sistemul ar deveni inconsistent.

Demonstrația avansează prin aritmetizarea sintaxei. Simbolurilor, formulelor și demonstrațiilor li se asociază un număr natural unic (un „număr Gödel”). Această codificare permite aritmeticii din P să se refere la enunțuri despre propria demonstrabilitate în P. Cu ajutorul lemei diagonale, Gödel construiește o formulă care spune: „Nu există niciun număr care să codifice o demonstrație a mea”. Mai precis, se construiește o formulă G care afirmă că nu există niciun număr n care să servească drept număr Gödel al unei demonstrații a lui G în interiorul lui P: $P \vdash G \leftrightarrow \neg Dem_P(\ulcorner G \urcorner)$. Acum, dacă sistemul ar putea demonstra această propoziție, ar deriva o contradicție; dacă ar putea dovedi negația ei, ar contrazice consistența. Prin urmare, niciuna dintre alternative nu poate avea loc, iar propoziția rămâne indecidabilă în sistem. Dacă P este consistent (în ipoteza clasică avem ω-consistență; în versiunea Rosser, e suficientă consistența simplă), atunci P este incomplet: sistemul nu poate demonstra fiecare propoziție aritmetică adevărată pe care o poate exprima.

A doua teoremă a lui Gödel consolidează rezultatul primei: niciun astfel de sistem nu își poate demonstra propria consistență folosind numai axiomele și regulile sale de inferență. Orice demonstrare a consistenței trebuie să se sprijine pe principii din afara sistemului. Prin urmare, limitele autoreferinței sunt și mai stricte: sistemul nu poate demonstra din interior că nu derivă contradicții (adică propria sa consistență), i.e. nu poate, dacă este consistent, să demonstreze în propriul limbaj Con(P) – unde Con(P) formalizează „nu există demonstrație în sistem a unei contradicții”.

Gödel a demonstrat tehnic ceea ce Wittgenstein identificase filosofic: prin mecanismul autoreferențial, sistemul ajunge la o limită internă și nu poate da

socoteală de propriile fundamente (formă logică la Wittgenstein, consistență la Gödel). Fundamentele sistemului rămân un „punct orb”.

Corespondența structurală între limita demonstrabilității la Gödel și limita sensului la Wittgenstein sugerează ceva mai profund decât o coincidență și cere o explicație. Această corespondență ridică o întrebare importantă: este ea manifestarea aceleiași constrângeri care apare în orice sistem capabil de autoanaliză? În ultimul capitol, vom formula corespondența sub forma unei conjecturi.

4. CONJECTURA TVG – *TRACTATUS* VERSUS GÖDEL (CONJECTURA PUNCTULUI ORB)

În *Tractatus*, Wittgenstein discută cel mai general sistem de reprezentare – un limbaj capabil, în principiu, să descrie orice stare posibilă de lucruri. Gödel tratează un sistem specific și minimal, dar fundamental – aritmetica formală. Faptul că ambele sisteme întâlnesc o limită internă a autoelucidării indică o constrângere comună.

Enunț:

Niciun sistem de reprezentare S nu poate, din interiorul său, să exprime integral propriile condiții de inteligibilitate[23].

Apariția acestei limite în sisteme de naturi diferite – limbajul idealizat pentru elucidarea sensului propozițional și un sistem formal aritmetic minimal pentru incompletitudine – sugerează o constrângere de natură structurală, nu o coincidență locală. Faptul că ea apare prin metode și registre diferite (filosofice și metamatematice) indică o limită principială: autoelucidarea nu poate fi completă. Există o distincție esențială și de neocolit între a folosi un sistem pentru a reprezenta lumea și a încerca, din interior, să justifici posibilitatea sistemului. Fundamentele oricărui sistem de reprezentare par să se afle, în mod necesar, într-un punct orb pentru sistem.

BIBLIOGRAFIE

1. Demopoulos, William, *Logicism and Its Philosophical Legacy*, Cambridge, Cambridge University Press, 2013.
2. Gilmore, Paul C., *Logicism Renewed: Logical Foundations for Mathematics and Computer Science, Lecture Notes in Logic*, 23, Cambridge, Cambridge University Press (for the Association for Symbolic Logic), 2016.

[23] Conjectura se manifestă diferit în funcție de puterea sistemului:

(a) Formă negativă (sisteme sub pragul expresiv – Aritmetica Presburger, logică propozițională): nu pot construi infrastructura autoreferențială. (Înmulțirea este nedefinibilă în aritmetica Presburger și astfel nu poate aritmetiza sintaxa.)

(b) Formă pozitivă (sisteme peste prag - PA, ZFC): pot construi autoreferința, dar nu pot demonstra proprietăți fundamentale. Consistența este indemonstrabilă – apare un deficit intern de demonstrabilitate.

Testarea sistematică pe alte clase de sisteme rămâne o direcție de cercetare viitoare.

3. Gödel, Kurt. „On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I." In *Collected Works, Volume I: Publications 1929–1936*, edited by Solomon Feferman et al., 144–195. New York: Oxford University Press, 1986.
4. Hacker, P. M. S., *Insight and Illusion: Themes in the Philosophy of Wittgenstein*, Revised edition, Oxford, Clarendon Press, 1987.
5. Hilbert, David și Wilhelm Ackermann, *Principles of Mathematical Logic*, New York, Chelsea Publishing Company, 1950 (trad. din ediția a II-a germană de Lewis M. Hammond, George G. Leckie și F. Steinhardt; ed. și note de Robert E. Luce).
6. Kenny, Anthony, *Wittgenstein,* Revised Edition, Malden (MA) / Oxford, Blackwell Publishing, 2006.
7. Peano, Giuseppe, „The Principles of Arithmetic, Presented by a New Method", în Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA), 1967, pp. 83–97.
8. Potter, Michael, „The Logic of the Tractatus", în Dov M. Gabbay și John Woods (ed.), *Handbook of the History of Logic*, vol. 5: *Logic from Russell to Church*, Elsevier (North-Holland), Amsterdam, 2009, pp. 255–304.
9. Robinson, Raphael M. (1950), „*An Essentially Undecidable Axiom System*". Proceedings of the International Congress of Mathematics: 729–730.
10. Rosser, J.B., „Extensions of Some Theorems of Gödel and Church", *The Journal of Symbolic Logic 1, no. 3* (Septembrie 1936): 87–91.
11. Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics*, Second Edition, George Allen and Unwin Ltd, London, 1937.
12. Tarski, Alfred, „The concept of truth in formalized languages", în *Logic, semantics, metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, trad. J. H. Woodger, ed. John Corcoran (ed. a 2-a), Indianapolis, Hackett Publishing, 1983, pp. 152–278.
13. Smith, Peter, *An Introduction to Gödel's Theorems*, ed. a II-a, CUP/Logic Matters, 2013/2020.
14. Whitehead, Alfred North; Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, vol. I–III. Ediția a II-a (1925–1927), Cambridge: Cambridge University Press, 1963.
15. Wittgenstein, Ludwig, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Editura Humanitas, București, 2012.
16. Zach, Richard, „Hilbert's Program Then and Now", în *Handbook of the Philosophy of Science. Volume 5: Philosophy of Logic*, ed. Dale Jacquette, Handbook coordonat de Dov M. Gabbay, Paul Thagard și John Woods, Amsterdam, Elsevier BV, 2006, p. 411–447. Disponibil online: https://philarchive.org/archive/ZACHPT.
17. Zach, Richard, „Hilbert's Program", în *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta și Uri Nodelman, Winter 2023 Edition, Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023. Disponibil la: https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/ (accesat la 15 august 2025).