PARADOXURILE LOGICE ŞI PRINCIPIUL NON-CONTRADICŢIEI

VICTOR EMANUEL GICA
Institutul de Filosofie şi Psihologie „Constantin Rădulescu-Motru"
al Academiei Române

The Paradoxes of Logic and the Principle of nocontradiction. This paper aims to present the significance function and the proper features that non-contradiction, in general and the principle of non-contradiction, in particular display within the contemporary logics' effort to solve logical mathematical paradoxes. Discovering this kind of paradoxes built up logics as a mathematical science and established the logical fundaments of mathematics. In dealing with those paradoxes, the three different aproaches disscused by this paper, logicism, formalism and intuitionism focused on the problem of non-contradiction. The proposed solutions changed the view upon traditional logics and also influenced every major direction in contemporary logics.

Keywords: non-contradiction, antinomy, paradox, mathematical logics, logicism, formalism, intuitionism.

Dezvoltarea logicii în direcţia constituirii ca ştiinţă matematică şi fundamentării logice a matematicii readuce în centrul preocupărilor logicienilor moderni problema non-contradicţiei, odată cu descoperirea aşa numitelor *antinomii* sau, în planul logicii formale, *paradoxuri* logico-matematice. Apărute în istoria gândirii, unele încă din Antichitate, paradoxurile pot fi definite în sens modern drept contradicţii logice demonstrate (deduse conform legilor logicii date), sau, în termenii sistemelor deductive, ca *teoreme contradictorii*. În epoca modernă, antinomiile logice au fost analizate din perspectivă filosofică (Kant, Hegel) pentru ca mai apoi, acestea să fie descoperite în mod neaşteptat în chiar interiorul construcţiilor matematice, devenind dintr-o problemă filosofică o problemă logico-matematică.

Apărute iniţial în domeniul teoriei mulţimilor, paradoxele logico-matematice scot la lumină caracterul primordial al problemei non-contradicţiei în cadrul oricărui sistem formal. O primă contradicţie logică în acest sens este semnalată, în anul 1857, de către matematicianul italian Burali-Forti, într-un articol intitulat *Una questione sui numeri transfiniti*, publicat în revista „Rendiconti del circolo matematico di Palermo". Mai precis, Burali-Forti arată că noţiunea de *ordinal al tuturor ordinalelor* din cadrul teoriei cantoriene a mulţimilor abstracte duce la contradicţie. Expusă de către matematicianul italian utilizând formalismul lui Peano şi al şcolii italiene, antinomia vizează trei aspecte demonstrate în teoria mulţimilor: 1) orice serie de numere ordinale defineşte un număr ordinal; 2) acest număr ordinal este cu o unitate mai mare decât cel mai mare număr ordinal al seriei considerate; 3) seria numerelor ordinale (în ordinea mărimii lor) este bine ordonată. Luând în considerare seria tuturor numerelor ordinale, aceasta defineşte un număr ordinal, notat cu Ω, care este cel mai mare dintre toate numerele. Seria numerelor ordinale ar conţine, în acest caz, pe Ω, cel mai mare număr ordinal, iar numărul ordinal de această serie nu este Ω, ci Ω + 1, ajungându-se astfel la contradicţie: dacă numărul ordinal este definit de seria tuturor ordinalelor, atunci nu Ω este numărul ordinal definit de seria tuturor ordinalelor, ci Ω + 1, astfel, cel mai mare număr ordinal nu este cel mai mare[1].

Un paradox analog este descoperit şi de către G. Cantor în 1899, în cadrul teoriei numerelor cardinale transfinite, fiind însă publicat mult mai târziu, în 1926, de către Ernst Zermelo[2]. Considerând *mulţimea tuturor mulţimilor* (*M*), şi *Nc* numărul său cardinal: *Nc* este cel mai mare număr cardinal posibil. Însă, conform unei teoreme din cadrul teoriei mulţimilor: numărul cardinal al tuturor submulţimilor lui *M* este mai mare decât numărul cardinal *Nc* al mulţimii *M*, ceea ce duce la contradicţie: pe de o parte, numărul cardinal *Nc* al mulţimii *M* a tuturor mulţimilor tuturor submulţimilor este cel mai mare număr posibil, însă, pe de altă parte, acesta nu este cel mai mare număr posibil, întrucât numărul cardinal al mulţimii tuturor submulţimilor lui *M* este mai mare ca *Nc*[3].

Construit în formă matematică, paradoxul lui Cantor poate fi expus prin analiză semantică şi sub formă logică. Pornind de la evidenţierea implicaţiilor termenului „toţi” (tuturor) din expresia *mulţimea tuturor mulţimilor* (*O*), Gh. Enescu arată că din sensul obişnuit al termenului „toţi” se pot deduce următoarele: a) *O* conţine în sine orice mulţime existentă şi posibilă; b) *O* nu este conţinut în nicio mulţime; c) ceva sau este conţinut în *O*, sau nu este mulţime. Expresia *mulţimea tuturor mulţimilor* este contradictorie, căci din c) rezultă că „a fi mulţime” este echivalent cu „a fi parte a lui *O*”, ceea ce intră în contradicţie cu afirmaţia că există cel puţin o mulţime, *O*, care nu se conţine în nicio mulţime. Astfel, permiţând formarea în limitele ei a conceptului *O*, teoria mulţimilor abstracte este contradictorie[4].

Un alt paradox din categoria paradoxurilor teoriei mulţimilor a fost descoperit de Bertrand Russell în 1903[5]. Asemănător cu cel al lui Cantor, dar cu o structură logică mai simplă, paradoxul lui Russell pleacă de la constatarea că orice

[1] A. Dumitriu, *Istoria logicii*, vol. 4, Bucureşti, Editura Tehnică, 1998, p. 138.

[2] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen: Mathematischen und Philosophischen Inhalts*, editor E. Zermelo, Berlin, Springer, 1932.

[3] A. Dumitriu, *Soluţia paradoxelor logico-matematice*, Bucureşti, Editura Ştiinţifică, 1966, p. 39.

[4] Gh. Enescu, *op. cit.*, p. 123.

[5] B. Russell, *The Principles Of Mathematics*, Cambridge, University Press, 1903.

mulţime *se poate conţine* sau *nu se poate conţine pe sine* ca element. Din prima categorie face parte, de exemplu, „mulţimea tuturor mulţimilor abstracte”, care fiind ea însăşi o noţiune abstractă, se conţine pe sine ca element. La fel, „mulţimea tuturor noţiunilor determinate” se conţine pe sine ca element, fiind ea însăşi o noţiune determinată. În schimb, „mulţimea noţiunilor concrete”, de exemplu, nu este o noţiune concretă, şi, ca atare, nu se conţine pe sine ca element.

Încercarea de a determina dacă *mulţimea tuturor mulţimilor care nu se conţin* se conţine sau nu se conţine pe sine devine însă problematică şi, indiferent de presupoziţie, sfârşeşte în contradicţie. Astfel, dacă se presupune că această mulţime se conţine pe sine, întrucât ea conţine numai clase care nu se conţin, ea nu se conţine pe sine. Invers, dacă mulţimea nu se conţine ca element, atunci, deoarece ea conţine toate clasele care nu se conţin, aceasta se conţine ca element.

Pentru a evita paradoxul la care se ajunge indiferent de presupoziţie, şi care ar deriva de fapt din presupunerea că o colecţie de obiecte poate să conţină membri care nu pot fi definiţi decât cu ajutorul colecţiei luată ca întreg, Russell introduce o regulă pe care o numeşte *principiul cercului vicios*. Potrivit acestui principiu, niciun membru al unei colecţii nu poate fi definit prin colecţia la constituirea căreia el a servit ca membru. În acest sens, „*clasa tuturor claselor care nu se conţin* nu este posibilă, fiindcă ar defini un nou membru cu ajutorul clasei din care face parte”[6]. În acest principiu al cercului vicios, Russell întrevede posibilitatea evitării paradoxelor logico-matematice şi a dezvoltării în continuare a construcţiei sistemului formal din *Principia Mathematica*. Russell este, de altfel, cel care dezvoltă prima încercare sistematică de soluţionare a antinomiilor logico-matematice. Traducerea principiului în logica matematică îl conduce pe Russell la disocierea obiectelor logice în *tipuri*, iar ierarhia acestora va fi o ierarhie de tipuri logice. *Teoria tipurilor logice* a fost prezentată de către Russell într-un articol din anul 1908 cu titlul *Mathematical Logic as base on the Theory of Types*, în „American Journal of Mathematics” (vol. 30, no. 3, jul., 1908) şi reluată ulterior, inclusiv în capitolul II al introducerii la prima ediţie din *Principia Mathematica.*

În sens larg, acesta impune acceptarea unei ierarhii de entităţi pe care Russell o realizează cu ajutorul noţiunilor de *tip* şi *ordin*. *Tipul* este definit ca un domeniu de semnificaţie, acea colecţie a argumentelor pentru care o funcţie propoziţională dată admite valori; printre argumentele unei funcţii unele se definesc în dependenţă de funcţia respectivă. Pentru a evita cercul vicios şi, implicit, paradoxele generate de acesta, este introdusă o ierarhizare a funcţiilor în conformitate cu tipul argumentelor. Argumentele funcţiei nu pot lua valori de un tip egal sau mai mare decât al funcţiei. Pentru o funcţie propoziţională Φx, unde Φ este de tipul n, pentru a nu obţine o expresie fără sens, care nu este nici adevărată, nici falsă, argumentul nu poate lua decât valori de tipul $n - 1$. Ierarhia obţinută, utilizând ideea de tip, va arăta astfel: 1) *tipul 0* – indivizii; 2) *tipul 1* – funcţii de indivizi; 3) *tipul 2* – funcţii de funcţii de indivizi; ş.a.m.d.

[6] A. Dumitriu, *Teoria logicii*, Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1973, p. 38.

Ierarhia tipurilor este introdusă pentru a evita utilizarea abuzivă al lui „toți” (*all*) care, pe parcursul studiului amintit, este analizat comparativ şi în distincție față de „orice” (*any*), în scopul delimitării domeniului utilizării legitime a lui „toți”. Din această analiză rezultă o limitare a funcțiilor la domeniul lor de semnificație (totalitatea valorilor pentru care funcția este adevărată sau falsă), concluzionând că: „Orice propoziție care conține *toți* (*all*) asertează că o funcție propozițională este totdeauna adevărată şi aceasta înseamnă că toate valorile funcției sunt adevărate nu că funcția este adevărată pentru toate argumentele, deoarece există argumente pentru care o funcție dată este fără sens, adică nu are valoare. Deci se poate vorbi de *toți* (*all*) al unei colecții atunci când aceasta formează parte a întregului *domeniu de semnificație* al unei funcții propoziționale, domeniul de semnificație fiind definit drept colecția argumentelor pentru care funcția respectivă este semnificantă, adică are valoare”[7].

Frank P. Ramsey a introdus distincția între două tipuri de antinomii[8]: *antinomii logice*, care se referă la grupul paradoxelor care conțin noțiuni logice sau matematice (clasă, număr…) şi în care sunt incluse paradoxele lui Burali-Forti, Cantor, Russell etc. şi *antinomii epistemologice*, grupul paradoxelor care nu conțin noțiuni logice (gândire, limbaj, simbolism utilizat), cum sunt paradoxul mincinosului, paradoxul lui Richard sau Grelling-Nelson ş.a. Antinomiile din cel de-al doilea grup au mai fost numite şi antinomii *lingvistice*, *semantice* sau *sintactice*.

În sensul clasificării lui Ramsey, ierarhia tipurilor ar fi destinată rezolvării antinomiilor *logico-matematice*, în timp ce ierarhia ordinelor ar viza aşa numitele antinomii *epistemologice*. În plus, aşa cum remarcă Gh. Enescu, diferența dintre *tip* şi *ordin* nu este suficient de clar definită, *tipurile* se referă la domeniul valorilor, în timp ce *ordinele* se referă la propoziții şi funcții propoziționale, reprezentând o diferențiere în cadrul tipului[9].

Pentru simplificarea ierarhizării are loc un fel de uniformizare a ideii de *propoziți*e cu cea de *funcție*, pe considerentul că o ierarhie a funcțiilor ar fi mai convenabilă decât una a propozițiilor şi funcții de diferite ordine pot fi obținute prin *metoda substituției* din propozițiile de diferite ordine corespunzătoare.

Variabilele *aparente* şi variabilele *reale* sunt definite printre ideile primitive ale sistemului logicii simbolice:

> (4) The truth of *any* value of a propositional function; i. e., of φx where x is not specified; (5) The truth of *all values* of a propositional function. This is denoted by

[7] B. Russell, *Mathematical Logic as Base on the Theory of Types*, în „American Journal of Mathematics”, vol. 30, no. 3, jul., 1908, p. 236.

[8] F.P. Ramsey, *The foundations of mathematics*, în „Proceedings of the London Mathematical Society” (Series 2), 1926, 25, pp. 338–384.

[9] Gh. Enescu, *Teoria sistemelor logice. Metalogica*, Bucureşti, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, 1976, p. 162.

> $(x).\varphi x$ or $(x):\varphi x$ or whatever larger number of dots may be necessary to bracket off the proposition. In $(x).\varphi x$, x is called an *apparent variable*, whereas when φx is asserted, where x is not specified, x is called a real variable[10].

Această trecere are loc prin intermediul noţiunii de *matrice*, formă obţinută prin înlocuirea într-o propoziţie a variabilelor aparente (corespunzătoare expresiei „pentru orice x") sau a termenilor constanţi cu variabile reale (când x nu este specificat, înţelegându-se că x este oarecare) şi care va reprezenta atât matricea propoziţiei originare, cât şi a oricărei funcţii sau propoziţii care se poate obţine din ea prin transformarea variabilelor reale în variabile aparente.

La rândul său, A. Dumitriu consideră că împărţirea funcţiilor în *ordine* este determinată de scopul urmărit de Russell şi Whitehead în *Principia Mathematica*, de stabilirea unui aparat logico-matematic care să facă posibilă exprimarea în mod logic a întregii matematici. În această ierarhie, o funcţie de ordinul întâi este o funcţie al cărei argument conţine ca variabile, fie aparente, fie variabile reale, numai indivizi. O funcţie de ordinul (n + 1) este funcţia care conţine cel puţin un argument sau o variabilă aparentă de ordinul n şi nu conţine niciun argument sau variabilă aparentă care să nu fie un individ sau o funcţie de ordinul întâi, sau … de ordinul n [11].

> A function whose argument is an individual and whose value is always a first-order proposition will be called a first-order function. A function involving a first-order function or proposition as apparent variable will be called a second-order function, and so on. A function of one variable which is of the order next above that of its argument will be called a predicative function; the same name will be given to a function of several variables if there is one among these variables in respect of which the function becomes predicative when values are assigned to all the other variables. Then the type of a function is determined by the type of its values and the number and type of its arguments[12].

Referindu-se, în cadrul tipului, la propoziţii şi funcţii propoziţionale, ordinele se diferenţiază la rândul lor în *predicative* şi *nepredicative*. O funcţie este predicativă dacă are mai multe argumente şi cel mai înalt ordin care apare printre argumentele funcţiei este n, atunci dacă ea este de ordinul $n + 1$, adică cel mai jos ordin compatibil cu acela pe care îl au argumentele sale[13]. O funcţie *nepredicativă* de ordinul n se obţine dintr-o funcţie predicativă de ordinul n prin transformarea unora dintre argumentele de ordinul $n - 1$ în variabile aparente[14].

O funcţie care nu conţine nicio variabilă aparentă este o funcţie *predicativă*. În fine, o funcţie cu un argument sau două este echivalentă formal cu o funcţie

[10] B. Russell, *op. cit.*, p. 244.
[11] A. Dumitriu, A. Dumitriu, *Teoria logicii*…, p. 40.
[12] B. Russell, *op. cit.*, p. 239.
[13] *Ibidem*, p. 244.
[14] Gh. Enescu, *Teoria sistemelor logice*..., p. 166.

predicativă cu acelaşi argument sau argumente. Funcţiile predicative sunt funcţii care au mai multe argumente, unde *n* este cel mai înalt ordin care apare printre argumentele funcţiei.

Ierarhia tipurilor duce la eliminarea unor propoziţii care utilizează termeni nepredicativi, fundamentale pentru matematici, şi fără a fi problematice sau paradoxale din punct de vedere logic. Recuperarea acestora este posibilă după Russell cu ajutorul *axiomei reductibilităţii*, prin care este asumată presupunerea că pentru fiecare funcţie propoziţională există o funcţie predicativă care este satisfăcută de toate argumentele de aceeaşi natură şi numai de către acestea. Cu ajutorul axiomei reductibilităţii, utilizând echivalenţa formală, reintroduce aceste propoziţii prin altele, echivalente cu ele, dar *predicative*: pentru orice funcţie dată de ordinul *n* există o funcţie predicativă formal echivalentă cu ea.

> We shall assume similarly that every function of two variables is equivalent, for all its values, to a predicative function of those variables, where a predicative function of two variables is one such that there is one of the variables in respect of which the function becomes predicative (in our previous sense) when a value is assigned to the other variable. This assumption is what seems to be meant by saying that any statement about two variables defines a relation between them. We will call this assumption the *axiom of relations* or the *axiom of reducibility.*[15]

În ansamblul ei, teoria tipurilor este bazată în principal pe *ierarhizarea* abstracţiilor (stabilirea pentru fiecare obiect abstract a unui tip căruia acesta îi aparţine) şi pe respectarea ierarhiei stabilite, respectiv a *ierarhiei tipurilor*, prin introducerea unei reguli fundamentale conform căreia unui obiect de tipul *n* i se pot aplica numai obiecte de tipul n + k (k ≥ 1) şi poate fi aplicat numai obiectelor de tipul n – r (r ≤ 1). Modul de ierarhizare a diferitelor tipuri (clase, predicate, relaţii ş.a.) prezintă, aşa cum arată şi Gh. Enescu[16], o corespondenţă între ierarhiile diferitelor entităţii, redată în tabelul de mai jos după cum este redată schematic de logicianul român:

Tip	**Clase**	**Predicate**	**Relaţii**	**Funcţii**	**Simboluri**
0	indivizi	indivizi	indivizi	indivizi	*a*, *b*, *c*, … *x, y*, *z*
1	clase de indivizi	predicate de indivizi	relaţii între indivizi	funcţii de indivizi	φ, ψ, …
2	clase de clase de indivizi	predicate de predicate de indivizi	relaţii de relaţii între indivizi	funcţii de funcţii de indivizi	*f*, *g*, *h*, …
…	…	…	…	…	…

Construcţia teoriei tipurilor a avut ca scop imediat soluţionarea paradoxelor, iar modul în care acest scop poate fi atins urmăreşte eliminarea *circularităţii* –

[15] *Ibidem*, p. 243.
[16] Gh. Enescu, *op. cit.*, p. 171.

cauza necesară a apariţiei acestora. Astfel, impunerea unor reguli prin care să se evite posibilitatea obţinerii unor mulţimi circulare sau entităţi supuse cercului vicios ar fi suficientă pentru a nu se ajunge la paradoxuri. Prin ierarhizarea diferitelor tipuri (clase, predicate, relaţii, funcţii), teoria lui Russell reglementează modul de formare a expresiilor, împiedicând astfel apariţia noţiunilor paradoxale, a expresiilor *fără sens*, nici adevărate nici false.

Teoria tipurilor a fost elaborată în două forme. Prima dintre acestea, *teoria simplă a tipurilor*, este destinată rezolvării paradoxurilor logice. Introducerea în cadrul fiecărui tip diferit de zero a ierarhiei *ordinelor* corespunde *teoriei ramificate a tipurilor*, care vizează paradoxurile *epistemologice* (sau *semantice*) din clasificarea lui F.P. Ramsey. Referitor la teoria tipurilor, Ramsey consideră că, odată cu adoptarea axiomei reductibilităţii, pentru a elimina paradoxurile logico-matematice este suficientă teoria simplă a tipurilor. Conform distincţiei lui Ramsey, antinomiile semantice nu pot apărea în niciun sistem logic sau matematic. Astfel că teoria ramificată a tipurilor nu ar fi strict necesară scopului principal urmărit în *Principia Mathematica*, ierarhia ordinelor excluzând paradoxurile de al doilea tip, legate de noţiuni semantice sau lingvistice cu care se operează într-un domeniu extins faţă de domeniul strict al matematicilor[17]. Antinomiile logice ar putea fi evitate prin teoria simplă a tipurilor, astfel că *teoria ramificată a tipurilor* şi *axioma de reductibilitate devin inutile*. În urma criticilor lui Ramsey şi Wittgenstein, Russell a renunţat la ele în ediţia a doua din *Principia Mathematica* (vol. I, 1925), sugerând în plus extinderea teoriei tipurilor la o *teorie a nivelurilor de limbaj*[18]. Cercetări în domeniul teoriei limbajelor şi metalimbajelor logice au fost întreprinse de F. Ramsey, R. Carnap şi A. Tarski.

Russell însuşi considera că antinomiile teoriei mulţimilor ar avea o natură logică şi nu una matematică. A. Dumitriu notează că: „Importanţa acestor paradoxe construite de Russell constă mai ales în faptul că ele arată că natura acestor contradicţii este pur logică şi că ele nu apar ca urmări ale câtorva noţiuni matematice mai complexe sau mai puţin precise – cum ar fi noţiunea de mulţime –, ci în cadrul logicii obişnuite, utilizând noţiunea logică de predicat sau aceea de clasă – extensiunea unui predicat – care corespunde noţiunii de mulţime”[19]. Formalizând logica, Russell a creat un instrument de precizie şi rigoare matematică şi a crezut că poate realiza programul logicist al lui Frege, de a funda matematicile pe logică şi pe noţiunea logică de *clasă* (*mulţime*). Cu toate perfecţionările aduse ulterior, logica matematică, ca şi teoria mulţimilor, nu a putut evita apariţia paradoxelor decât prin introducerea unor convenţii[20].

[17] W. Kneale, M. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1975, p. 300.
[18] A. Dumitriu, *Soluţia paradoxelor logico-matematice*, Bucureşti, Editura Ştiinţifică, 1966, p. 63.
[19] *Ibidem*, p. 41.
[20] A. Dumitriu, *Teoria logicii* ..., p. 37

Un paradox semantic în teoria mulțimilor şi a limbajului natural este *paradoxul lui Richard*, descris pentru prima dată de către matematicianul francez Jules Richard în 1905 într-o scrisoare către directorul „Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées". Aceasta a fost publicată sub forma unui scurt articol, în care autorul intenționează să arate că nu este necesar să se ajungă până la teoria numerelor ordinale pentru a descoperi contradicții[21]. După cum notează Gh. Enescu, paradoxul lui J. Richard, catalogat ca paradox al definibilității finite, a pus capăt încercărilor unor matematicieni care şi-au propus rezolvarea dificultăților apărute în teoria mulțimilor prin înlăturarea mulțimilor transfinite prin introducerea definițiilor constituite cu un număr finit de cuvinte[22].

Paradoxul este expus cu referire la o limbă naturală determinată (limba franceză în expunerea originală), luându-se în considerare toate numerele reale în formă zecimală care pot fi definite cu ajutorul unui număr finit de cuvinte ale acestei limbi. Aceste numere alcătuiesc o mulțime E, infinită, ordonabilă şi enumerabilă, având ca elemente pe: a_1, a_2, …; (E): a_1, a_2, …

Se defineşte un număr real N care nu aparține lui E prin faptul că a n-a zecimală a lui N este cu 1 mai mare decât a_n, exceptând situația în care acesta este 8 sau 9, în care a n-a zecimală a lui N este 1. De vreme ce N diferă prin a n-a zecimală de a_n pentru fiecare N, atunci N nu aparține mulțimii E, ceea ce este contradictoriu deoarece N este definit printr-un număr finit de cuvinte şi, ca atare, aparține lui E. În mod paradoxal, Richard avea să arate în aceeaşi scrisoare în care expusese construcția paradoxului că, de fapt, este vorba de o contradicție aparentă. Astăzi, paradoxul este utilizat în mod frecvent pentru a evidenția importanța distincției între matematică şi metamatematici.

Variante ale aceluiaşi paradox sunt *paradoxul lui Berry* şi *paradoxul Zermelo-König*. Deşi paradoxul lui Richard a fost primul paradox al *definibilității* publicat, un paradox semantic asemănător este atribuit lui George Gotfery Berry, bibliotecar la Oxford. Acesta a fost publicat în forma originală de către Russell[23], reprezentând o variantă simplificată a paradoxului lui Richard. Contradicția apare în acest caz referitor la cel mai mic ordinal care nu poate fi definit într-un număr finit de cuvinte, dar care este de fapt definit într-un număr finit de cuvinte.

Descoperit de către Ernst Zermelo în anul 1904[24], paradoxul Zermelo-König[25] se referă la *teorema mulțimilor bine ordonate*, care îi poartă şi numele, din

[21] J. Richard, *Les Principes des Mathématiques et le Problème des Ensembles*, în „Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées", anul 16, nr. 12, Paris, Libraire Armand Colin, 1905, p. 12.

[22] Gh. Enescu, *Paradoxurile logicii matematice…*, p. 127.

[23] B. Russell, *op. cit.*, p. 223.

[24] E. Zermelo, *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*, „Mathematische Annalen", Bd. 59 (4), 1904, pp 514–516.

[25] Acelaşi raționament a fost expus la vremea respectivă şi de către matematicianul Julius König în cadrul Congresului Internațional de Matematică de la Heidelberg; J. König, (1904), *Zum Kontinuum-Problem*, în Adolf Krazer, *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, pp. 144–147, republicat ca J. König, (1905), *Zum Kontinuum-Problem*, în „Mathematische Annalen", 60 (2), pp. 177–180.

cadrul teoriei mulţimilor. Teorema enunţă că pentru orice mulţime A, există o relaţie de ordine „$\leq$", astfel încât (A,$\leq$) este *mulţime bine ordonată*. Fiind date mulţimea numerelor reale *R* care pot fi exprimate printr-un număr de cuvinte finit şi determinat şi *R'* mulţimea tuturor celorlalte numere reale, orice număr real dat aparţine sau mulţimii exclusiv sau mulţimii *R* sau mulţimii *R'*. Conform teoremei lui Zermelo, mulţimea numerelor reale este *bine ordonată*. Contradicţia apare în legătură cu ρ, primul element al mulţimii *R'*, *bine ordonată*, care, pe de o parte, aparţine mulţimii *R'*, dar fiind definit cu un număr de cuvinte finit, ρ aparţine mulţimii *R*[26].

Un alt paradox a fost pus în discuţie în anul 1908 de către Kurt Grelling şi Leonard Nelson[27]. Cu toate că este analog şi derivat din paradoxul lui Russell, în acest caz este vorba de un paradox semantic, construit pe baza împărţirii cuvintelor care desemnează însuşiri în două clase: cuvintele care *au însuşirea* pe care o desemnează, numite *autologice* şi notate prescurtat cu *Aut* şi cuvintele care *nu au însuşirea* pe care o desemnează, numite *heterologice* şi notate cu *Het*. Problema care se pune şi este în legătură cu cuvântul „heterologic", care, în acest sens, duce la contradicţie. Mai precis, dacă se presupune că *Het* este *autologic*, atunci prin chiar definiţia sa, nu poate desemna cuvinte *autologice*, deci va fi *heterologic*. Dacă, dimpotrivă, *Het* este considerat ca fiind *heterologic*, atunci, corespunde definiţiei sale şi, ca atare, se autodesemnează, ceea ce ar însemna că aparţine clasei cuvintelor autologice, ar fi *autologic*.

În manieră simbolică, paradoxul lui Grelling poate fi redat astfel[28]: «C» desemnează un cuvânt oarecare, iar C este proprietatea pe care el o exprimă. Definiţia predicatului *heterologic* = *Het* va fi: *Het* «C» $=_{\mathrm{Df}} \sim$ C («C» (1). Având în considerare valabilitatea definiţiei (1) pentru oricare cuvânt C se obţine echivalenţa generală (pentru oricare «C»): («C») $\cdot$ *Het* («C») $\equiv \sim$ C («C») (2) Paradoxul apare pentru valoarea particulară a lui («C») = *Het*, respectiv: *Het* («*Het*») $\equiv \sim$ *Het* («*Het*»)

Thoralf Skolem pune în discuţie în anul 1923 un paradox cu ajutorul căruia urmăreşte să argumenteze relativitatea aparatului conceptual al teoriei mulţimilor. Acesta pleacă de la presupunerea elaborării unei axiomatizări consistente a teoriei mulţimilor, axiomatizare care, conform teoremei lui Löwenstein-Skolem-Gödel, admite un model numărabil (M). Axiomatizarea admisă ar trebui să conducă la demonstrarea unei mulţimi infinite *z*, astfel că modelul M trebuie să conţină un element *z* şi o serie infinită *numărabilă* de elemente: $e_1 \in z$, $e_2 \in z$, $e_3 \in z$, … $e_k \in z$, …

[26] A. Dumitriu, *Soluţia paradoxelor logico-matematice ...* , p. 45.

[27] K. Grelling & L. Nelson. *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*, în *Abhandlungen der Fries'schen Schule 2*, no. 3, 1908, pp. 301–33.

[28] A. Dumitriu, *op. cit*., p. 47.

Aceeaşi axiomatizare, pe de altă parte, va trebui să permită demonstrarea mulţimii U*z* tuturor submulţimilor lui *z*: M trebuie să conţină un element *y*, având aceeaşi proprietate ca şi elementele lui M, respectiv, f_1, f_2, f_3 … care aparţin lui *y*: $f_1 \in z$, $f_2 \in z$, $f_3 \in z$, … $f_k \in z$, … corespunzând diferitelor submulţimi ale lui *z*. Supoziţia iniţială, că M este numărabil, este contrazisă, întrucât *z* este o mulţime infinită numărabilă, iar mulţimea acestor submulţimi trebuie să aibă puterea continuului. Elementele f_1, f_2, f_3 … ale lui M constituie o mulţime având puterea continuului.

Un paradox ale cărui consecinţe se vor răsfrânge ca amploare asupra întregului domeniu al sistemelor logicii formale i se datorează lui Kurt Gödel (1931). În demersul său, Gödel urmăreşte să arate că idealul matematicienilor de a exprima formal şi complet matematicile nu poate fi atins. Orice sistem formal lipsit de contradicţie, de genul sistemului propus de Russell şi Whitehead în *Principia Mathematica*, conţine propoziţii nedecidabile şi, ca atare, se dovedeşte a fi, în mod necesar, incomplet. Un astfel de sistem nu ar putea include întreaga aritmetică, unele teoreme de aritmetică rămânând în afara sistemului, iar sistemul formal adoptat va conţine enunţuri matematice adevărate, dar nedemonstrabile. Printre propoziţiile nedecidabile ale oricărui sistem formalizat al aritmeticii, adică acele propoziţii care nu pot fi nici demonstrate şi nici infirmate pe baza regulilor de deducţie din cadrul sistemului, se numără şi enunţul că *sistemul formal considerat este lipsit de contradicţie*, iar problema non-contradicţiei acelui sistem nu poate fi decisă în cadrul sistemului, ci în afara acestuia.

În legătură cu demonstraţiile de inconsistenţă, David Hilbert este cel care a introdus prin ideea de metamatematică, matematica de gradul al doilea. În cadrul metamatematicii, spre deosebire de enunţurile unui sistem formal care au un caracter pur sintactic, enunţurile metamatematice au ca obiect natura relaţiilor dintre simbolurile, axiomele, teoremele şi regulile de deducţie ale respectivului sistem formal. La acest nivel, la care preocuparea principală este non-contradicţia sistemului considerat, prin metoda modelelor a interpretării unui sistem formal, s-au obţinut în unele cazuri rezultate privind o demonstraţie de non-contradicţie relativă. Însă, aşa cum remarcă şi S. Marcus, problema principală formulată de Hilbert era aceea a realizării de demonstraţii de non-contradicţie absolută. În acest sens, rezultatul paradoxal al demersului lui Gödel, aşa numita *teoremă de incompletitudine*, invalida în fapt proiectul lui Hilbert de formalizare necontradictorie şi completă a matematicii, făcând din acesta „victima” propriei ideologii formaliste[29].

Sintetizând analiza pe care o face paradoxurilor şi a unora dintre procedeele de rezolvare a acestora, Gh. Enescu notează că apariţia paradoxurilor este generată, în principal, dar nu numai, de confundarea diferitelor niveluri de abstracţie. Alături de această confuzie, condiţii suficiente şi necesare din punct de vedere logic pentru

[29] S. Marcus, *Provocarea ştiinţei*, Bucureşti, Editura Politică, 1988, pp. 58–60.

apariţia paradoxurilor sunt: expresia paradoxală trebuie să conţină o relaţie sau un subiect negativ, iar subiectul expresiei trebuie să fie un caz individual (o mulţime bine determinată, o propoziţie individuală, un anumit număr)[30]. Una dintre consecinţele demersului necesar de evitare a paradoxurilor în dezvoltarea sistemelor logico-matematice a fost, după acelaşi autor, extinderea conceptului de *corectitudine* prin introducerea de *reguli de formare a expresiilor* alături de *regulile de deducţie*. În plus, paradoxurile au impus şi o cercetare mai atentă a regulilor de substituţie.

Privită în ansamblu, problema paradoxelor logico-matematice relevă o insuficienţă a concepţiilor logice tradiţionale despre infinit, ordinea logică a abstracţiilor, mulţime, precum şi despre valoarea şi limitele logicii bivalente, care nu ar fi cel mai adecvat instrument pentru studierea paradoxurilor. De asemenea, conceptele paradoxale ar trebui considerate ca imposibile şi respinse ca atare.

Având în vedere aceste concluzii generale, Gh. Enescu consideră că problema soluţionării paradoxurilor se extinde, trimiţând către domeniul mult mai amplu al construcţiei sistemelor ştiinţifice, în care ţintele sunt asigurarea ştiinţei împotriva contradicţiilor, garantarea adevărului cunoaşterii, rolul logicii în cadrul progresului ştiinţei, precum şi, în particular, perfecţionarea mijloacelor raţiunii şi ale limbajului[31].

Trecând în revistă diferitele încercări de a găsi soluţii problemei paradoxelor de-a lungul istoriei gândiri, A. Dumitriu împarte aceste soluţii în două mari categorii: *poziţia filosofică*, în care sunt incluse soluţiile care introduc un principiu sau axiome străine de mecanismul logic în interiorul căruia s-a produs contradicţia, şi *poziţia strict logică*, reprezentată în mod exclusiv de poziţia lui Aristotel din ultima carte a *Organon*-ului.

În prima categorie, sunt incluse ca distincte următoarele tipuri de soluţii: soluţia eleaţilor, poziţia ontologică (Heraclit, Hegel), poziţia epistemologică (sofiştii, scepticii şi micii socratici), poziţia lui Kant şi poziţia logico-matematică contemporană. Fără a detalia aici motivaţia specifică pentru care fiecare dintre aceste tipuri de soluţii sunt incluse în cadrul poziţiei filosofice, reţinem că în cadrul ultimei categorii, cea logico-matematică contemporană, argumentul pe baza cărora acestea sunt grupate este recunoaşterea existenţei ireductibile a paradoxurilor care apar în mod inexorabil în orice simbolism logic şi în teoriile formalizate din pricina naturii limitate ale acestora. Soluţia logico-matematică, spune Dumitriu, constă în admiterea uneia sau mai multor axiome suplimentare restrictive, mai mult sau mai puţin convenţionale, anexate sistemului logic considerat în care sunt constatate paradoxurile şi cu ajutorul căruia se încearcă evitarea paradoxurilor[32]. În ceea ce priveşte caracterul filosofic al acestui tip de soluţii, A. Dumitriu nu îl argumentează în mod concret, considerând că acesta este recunoscut de cei mai autorizaţi

[30] Gh. Enescu, *Paradoxurile logicii matematice…*, p. 141.
[31] *Ibidem*.
[32] A. Dumitriu, *op. cit.*, pp. 55–56.

specialişti în domeniu. În acest sens citează o remarcă a lui Russell după care logica matematică, ocupându-se de probleme încă nerezolvate, ţine de filosofie. Este amintit de asemenea şi polonezul A. Mostowski[33], care la rândul său reduce problemele generate de fundamentele matematicii la două. Prima priveşte natura conceptelor matematice, iar a doua natura demonstraţiei matematice şi criteriile specifice care permit distingerea unei demonstraţii corecte de una falsă. Natura filosofică a acestor probleme derivă din imposibilitatea soluţionării lor în limitele matematicii şi aplicând numai metodele matematicii.

Cea de-a doua categorie de soluţii ar fi reprezentată, după cum menţionat mai sus, de poziţia lui Aristotel din ultima carte a *Organon*-ului. Mai precis, paradoxurile sunt tratate ca sofisme, iar analiza lor duce în ultimă instanţă la descoperirea unei erori de logică, a cărei evidenţiere echivalează cu soluţionarea respectivului paradox. În sprijinul acestei clasificări, A. Dumitriu menţionează că, începând de la Aristotel, toate tratatele de logică au menţinut clasificarea şi soluţiile acestuia, paralogismele cele mai complicate fiind cele construite pe baza unui *cerc vicios* de genul *petitio principii* sau *circulum in probando*[34].

În enumerarea reprezentanţilor acestei categorii, Dumitriu remarcă şi insistă asupra concepţiei logicienilor scolastici şi importanţei considerabile pe care aceştia au acordat-o rezolvării sofismelor şi în special a paradoxelor în tratatele numite *Insolubilia*. Cu toate că abordarea logicienilor scolastici vizată nu a fost unanimă, existând la vremea respectivă şi opinii conform cărora unele probleme ar fi cu adevărat insolubile, totuşi acestea nu pot fi considerate semnificative, iar caracteristica predominantă a perspectivei abordării paradoxelor afirmă posibilitatea găsirii unei soluţii strict logice. Denumirea de *insolubilia* dată acestor probleme s-ar fi datorat de fapt dificultăţii rezolvării şi nu imposibilităţii de a găsi o soluţie, alta decât evitarea apariţiei lor.

În aceeaşi categorie, a poziţiei strict logice asupra problemei paradoxurilor, sunt incluşi H. Poincaré şi J. Richard. Soluţia lui Richard la propriul paradox evidenţia că, în cadrul acestuia, contradicţia era numai una aparentă. Referindu-se la aceasta, H. Poincaré observă că mulţimea *E*, din exemplul ales chiar de Richard, este mulţimea tuturor numerelor care pot fi definite printr-un număr finit de cuvinte, fără a introduce noţiunea de mulţime *E*, şi, ca atare, neputând defini pe *E* prin însăşi mulţimea *E*, definiţia lui *E*, ar conţine un cerc vicios. N-a fost definit cu un număr finit de cuvinte pe baza noţiunii de mulţime *E*; astfel N nu face parte din *E*.

> Reportons-nous à ce que nous avons dit de cette antinomie au § VII ; *E* est l'ensemble de tous les nombres que l'on peut définir par un nombre fini de mots, sans introduire la notion de l'ensemble *E* lui-même. Sans quoi la définition de E contiendrait un cercle vicieux ; on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même.

[33] A. Mostowski, *The Present State of Investigations in The Foundations of Mathematics*, Varşovia, Polska Akademie Nauk, 1955.

[34] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 57.

> Or, nous avons défini N, avec un nombre fini de mots il est vrai, mais en nous appuyant sut la notion de l'ensemble *E*. Et voilà pourquoi N ne fait pas partie de *E*.
> Dans l'exemple choisi par M. Richard, la conclusion se présente avec une entière évidence et l'évidence paraîtra encore plus grande quand on se reportera au texte même de sa lettre. Mais la même explication vaut pour les autres antinomies ainsi qu'il est aisé de le vérifier.
> *Ainsi les définitions qui doivent être regardées comme non prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux*[35].

Poincaré adoptă soluţia lui Richard şi, mai mult, considerând concluzia acestuia ca evidentă, o extinde ca viabilă şi pentru alte antinomii, susţinând că definiţiile care ar trebui privite ca non-predicative sunt cele care conţin un *cerc vicios*, iar descoperirea cercului vicios în cadrul unei probleme paradoxale ar fi suficientă pentru ca respectivul paradox să dispară.

În replică la cele susţinute de Poincaré, Russell avea să fie de acord cu acesta în privinţa faptului că toate aceste paradoxuri provin dintr-un fel de cerc vicios, ceea ce însă acesta nu vede este posibilitatea de a evita un cerc vicios de acest fel[36], soluţia propusă de Poincaré, deşi valabilă, nu este suficientă pentru a rezolva problema paradoxurilor în ansamblul ei.

În privinţa aspectului logic al antinomiilor, trebuie menţionat, aşa cum notează şi A. Dumitriu, că B. Russell a fost primul care a observat că problema trebuie pusă pe un plan pur logic, fiind una de ordin pur formal, iar soluţia propusă prin intermediul *teoriei tipurilor logice* constituie cel mai important efort de a găsi o soluţie paradoxelor logico-matematice[37].

Odată cu paradoxul lui Gödel, care indica prezenţa propoziţiilor nedecidabile în orice sistem formalizat care conţine aritmetica, problemele trebuie privite în mod inevitabil şi din perspectiva faptului că orice formalism deductiv are propriile limitele pe care deductibilitatea logică pare că nu le poate depăşi. La rândul său, chiar Russell constatase în cercetările sale imposibilitatea exprimării tuturor regulilor unui formalism logic în simboluri. Regula substituţiei, conform căreia, în orice formulă adevărată (tautologie), unuia şi aceluiaşi simbol i se poate substitui o expresie propoziţională arbitrară, formula rămânând adevărată dacă simbolul este înlocuit cu noua expresie în toate locurile în care acesta apare, nu beneficiază de un tratament formal, ceea ce ar indica, chiar după Russell, un oarecare eşec al formalismului în genere. De vreme ce pentru baza logică a teoriei tipurilor este indicată, în ultimă instanţă, o anumită „consonanţă" cu simţul comun, care nu are în sine un caracter logic, principala obiecţie care se poate formula în acest sens ar fi chiar lipsa caracterului necesar al teoriei[38].

[35] H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1908. pp. 206–207.

[36] B. Russell, *La théorie des types logiques*, în „Revue de metaphysique et morale", anul XVIII, Paris, Libraire Armand Colin, 1910, p. 263.

[37] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 59.

[38] *Ibidem*, p. 61.

În cazul ierarhiei limbajelor, sugerată chiar de Russell, prin care se încearcă soluționarea paradoxurilor lingvistice, neputându-se vorbi despre un limbaj în însuşi limbajul întrebuințat, se vorbeşte într-un metalimbaj. Condiția pentru evitarea paradoxurilor semantice este ca diferitele tipuri de limbaj să nu fie confundate. După A. Dumitriu, şi în teoria nivelurilor de limbaj se manifestă lipsa de fundamentului logic, ceea ce impune aceeaşi principală obiecție şi față de aceste teorii, şi anume lipsa caracterului necesar. Astfel, acceptarea acestora impusă de nevoia de a elimina contradicțiile nu elimină caracterul artificial, restricțiile pe care le introduc fiind *convenții* menite să asigure non-contradicția limbajului.

Cu toate considerațiile de mai sus se poate spune, aşa cum notează şi Gh. Enescu, că formalizarea cvasi-completă a logicii şi matematicii, în *Principia Mathematica*, promitea să fie încheierea procesului de *logicizare* a matematicii (justificarea tezei logiciste) şi începutul fundamentării matematicii (ca şi a logicii) pe baze *pur formale*[39]. Noua concepție formalistă, având ca promotor pe David Hilbert, avea să repună în discuție problema paradoxurilor şi a non-contradicției, precum şi disputa dintre logicism şi intuiționism. În acest sens, direcțiile de cercetare ale formalismului lui Hilbert, sintetizate de Gh. Enescu, au fost îndreptate către: perfecționarea metodei axiomatice (pe bazele geometriei), construirea analizei pe calea reducerii teoriei numărului la teoria ale cărei obiecte sunt numere şi mulțimi de numere, precum şi cercetări îndreptate spre fundamentarea noțiunilor de număr şi mulțime[40].

O a treia cale, în opoziție atât cu poziția logicistă, cât şi cu cea formalistă, s-a constituit în poziția intuiționistă. Pentru L.E.J. Brouwer, fondatorul intuiționismului în matematică, sursa paradoxurilor logico-matematice nu se află nicidecum în eroarea cercului vicios, ci într-o interpretare specifică a conceptului de infinit, bazată pe teoria generală a *infinitului potențial*.

În ansamblu, cauza erorilor care generează paradoxurile este chiar identificarea logicistă a matematicii cu logica. Sursa acestei identificări este plasată, aşa cum precizează şi Alexandru Surdu, în confuzia dintre actul construcției matematice şi limbajul matematic, esențială pentru matematica efectivă fiind *construcția* mentală a rezultatului matematic şi nu mijlocul de comunicare a acestuia, expresia sa lingvistică. Posibilele aspecte contradictorii ale limbajului, în care este exprimată construcția mentală a rezultatelor matematicii, sunt lipsite de importanță din punct de vedere matematic. Matematica pură este, din punct de vedere intuiționist, o activitate independentă de limbaj, care are ca obiect construcțiile matematice intuitive nelingvistice. Astfel că, paradoxele în discuție nu sunt, ci numai par a fi paradoxe matematice. Una dintre tezele intuiționismului, care a determinat opoziția permanentă față de demersurile formaliste de axiomatizare a teoriei mulțimilor, este că existența matematică efectivă implică întotdeauna non-contradicție logică,

[39] Gh. Enescu, *Teoreme de indecidabilitate în sisteme de tipul* Principia Mathematica, în *Pradoxuri, sofisme, aporii*, Bucureşti, Editura Tehnică, 2003, p. 202.

[40] *Ibidem*, p. 203.

ceea ce nu este valabil şi reciproc, non-contradicţia logică neimplicând întotdeauna existenţa matematică efectivă[41]. Pe de altă parte, atâta timp cât ele nu apar în logică în genere, ci în logica matematică în special, în care valabilitatea principiului terţului exclus este admisă ca absolută şi universală, acestea nu pot fi considerate nici paradoxe logice[42]. Practicarea unei matematici corecte şi a unei logici corespunzătoare ar face imposibilă apariţia paradoxelor.

Din perspectivă intuiţionistă se manifestă o anumită suspiciune privitoare la unele legi logice. Este vorba în primul rând de principiul terţului exclus (*tertium non datur*), care, în matematică, ar trebuie aplicat cu anumite rezerve, apoi de legea dublei negaţii (*negatio duplex*) şi, pe baza acestora, demonstraţia indirectă (*reductio ad absurdum*). Valabilitatea principiului terţului exclus nu este respinsă, ci doar limitată. Adepţii intuiţionismului admit argumentările bazate pe terţul exclus numai în cazul mulţimilor finite, respingându-le valabilitatea pentru mulţimile infinite. În această ipostază, ideea infinitului actual, încheiat, specific matematicii şi logicii clasice, nu este admisă, ci numai ideea unui infinit potenţial, mereu în devenire, niciodată încheiat.

Limitarea aplicării se referă la succesiunile infinite determinate, în cadrul cărora este posibilă existenţa unor situaţii, în care rezolvarea unor probleme ar necesita o infinitate de operaţii. În astfel de cazuri, în care nu există posibilitatea reală a verificării, a dovedi că un enunţ este fals nu implică neapărat (*tertium non datur*) adevărul enunţului contrar. Probarea adevărului acestui enunţ ar necesita o indicaţie experimentală sau de construcţie, iar atunci când este vorba de mulţimi infinite, există cel puţin un caz în care nu putem face acest lucru. De aici axioma lui Brouwer: *absurditatea absurdităţii nu implică adevărul* (adevărul însă implică absurditatea absurdităţii). Cu alte cuvinte, absurditatea absurdităţii (echivalentul intuiţionist al negaţiei clasice) ne dă o modalitate particulară a propoziţiilor, care diferă de noţiunile simple de adevăr şi fals. Sintetizând, prin conceperea infinitului ca *potenţial*, şi nu ca *actual*, şi interzicerea terţului exclus în domeniului mulţimilor infinite, Brouwer consideră că paradoxele infinitului sunt eliminate.

Referindu-se la obiectivul principal al intuiţionismului propriu-zis, care a fost şi a rămas profesarea unei matematici intuitive, pure, independentă de limbaj şi logică, precum şi la faptul că opoziţia concepţiei intuiţioniste nu se îndreaptă împotriva logicii în genere, ci numai a logicii matematice în accepţiunile logiciste sau formaliste, Al. Surdu consideră că „intuiţionistic vorbind, este cu totul îndreptăţită profesarea unei *logici simbolice*, adică a unei logici în formă de calcul, cu condiţia ca aceasta să nu fie aplicată la matematici, nici pentru *fundarea* (poziţia logicistă) şi nici pentru *construcţia* lor formală (poziţia formalistă), ci dimpotrivă *matematicile trebuie să constituie fundamentele logicii, să fie aplicate la logică*, după ce au fost construite intuitiv”[43].

[41] Al. Surdu, *Elemente de logică intuiţionistă*, Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1976, p. 18.
[42] *Ibidem*, pp. 12–13.
[43] *Ibidem*, p. 19.

Ceea ce interesează, în primă instanță, în cazul de față nu sunt atât încercările şi soluțiile concrete de rezolvare a paradoxelor logico-matematice, ci, mai cu seamă, locul, rolul şi semnificația non-contradicției atât ca idee, cât şi ca principiu logic în cadrul acestora în logica modernă. Aşa cum am văzut, odată cu dezvoltarea teoriilor axiomatice, problema non-contradicției captează centrul preocupărilor din domeniul logicii prin apariția paradoxurilor (antinomiilor) în sistemele axiomatice.

Gh. Enescu prezintă ideea de contradicție în general ca un caz particular al diferenței. Mai precis se trece de la $x \neq y$ (diferență) la $x \neq y$ (contradicție). Aşa cum $x = y$ exprimă o identitate care poate fi ideală sau relativă, diferența exprimată de contradicție, $x \neq y$, poate fi ideală sau relativă. Ideea de contradicție ca „limită absolută a diferenței (x diferă de orice y, deci şi de sine)" este deosebită de ceea ce numim diferența contrariilor. Față de contradicție, care impune ca şi condiție imposibilitatea ca elementele contradictorii să aibă loc împreună şi de a fi absente împreună, în cazul contrarietății acestea nu pot avea loc ambele în acelaşi timp şi sub acelaşi raport. Aceasta face ca principiul complementarității să fie asimilat cu contrarietatea şi nu cu contradicția[44]. În acest sens, unele sisteme axiomatice se supun principiului complementarității, în sensul că sunt sau *necontradictoriii*, sau *complete*, în mod exclusiv, neputând îndeplini simultan cele două condiții.

În acelaşi timp, trebuie explicitată clar şi diferența între termenul *contrar* şi termenul *negativ* ($\neg A$), acesta din urmă având interpretări diferite în istoria logicii. În manieră extensivă, termenul negativ poate fi interpretat, în modul cel mai larg, ca „tot ce nu este A" sau „tot ce nu este A în domeniul D" sau chiar „absența lui A". Cea de-a doua interpretare, consideră Gh. Enescu, este cea la care teoria mulțimilor a trebuit să se limiteze, în timp ce pentru logică ar fi necesar, pentru a evita anumite dificultăți, să ne limităm la ultima interpretare[45].

Sub aspect formal contradicția poate fi interpretată ca simplu raport între propoziții sau termenii lor, odată cu apariția logicii simbolice, din semnificația acestora au fost eliminate atât aspectele psihologice de conținut, cât şi cele de ordin metafizic, fără ca aceasta să însemne eliminarea substratului ontologic şi gnoseologic al logicii. Trecând peste diferitele formulări ale principiului non-contradicției, vom reține aici că, din punct de vedere pur formal, acesta apare în cadrul logicii propozițiilor exprimat astfel ca $\neg(p \ \& \ \neg p)$, sau poate fi formulat ca principiu al imposibilității de a diferi de sine: $\neg(p \neq p)$.

Cele două formulări sunt reținute de Gh. Enescu ca fiind importante în analiza paradoxurilor, atâta vreme cât unele paradoxuri au forma $\vdash p \ \& \ \neg p$ (*asertarea non-contradicției*), iar altele $\vdash p \equiv \neg p$ (*auto-contradicția*).

Utilizând transformările din logica propozițiilor, prin intermediul dublei negații ($\neg\neg p = p$), negarea contradicției se poate transforma, în terțul exclus: $\neg(p \ \& \ \neg p) \equiv p \vee \neg p$, iar negarea auto-contradicției se transformă în identitatea $\neg(p \neq p) \equiv p = p$.

[44] Gh. Enescu, *Identitate şi necontradicție în logica actuală*, în *Paradoxuri, sofisme, aporii*, Bucureşti, Editura Tehnică, 2003, p. 178.

[45] *Ibidem*.

În cazul paradoxurilor, arată acelaşi Gh. Enescu, încălcarea principiului non-contradicţiei are loc în unul dintre sensurile: $p = \neg p$ (*indecidabilitate*) sau $p = \& \neg p$ (*decizie contradictorie*); în primul caz, de la $p = \neg p$ nu se poate trece nici la p, nici la $\neg p$, pe când în al doilea, de la $p = \& \neg p$ se poate trece atât la p, cât şi la $\neg p$, un exemplu pentru acesta din urmă fiind paradoxul lui Cantor.

Făcând apel a Fraenkel şi Bar-Hillel, Enescu conchide că, în cazul propoziţiilor, antinomia apare prin utilizarea prea largă a noţiunilor de *propoziţie* şi *adevăr*, respectiv *fals*, şi că ar trebui precizat că nu noţiunile ultralargi în sine conduc la antinomii, ci modul de a le trata, cum ar fi de exemplu faptul că li se aplică legile obişnuite ale teoriei. În acest sens s-ar distinge astfel de moduri de tratare, care, consideră autorul român, par ele însele contradictorii: 1) noţiunile ultralargi nu sunt corecte (Russell, *teoria tipurilor*) şi 2) noţiunile ultralargi sunt corecte (von Neumann, Bernays, *metoda axiomatică*). În acest sens, conform principiului non-contradicţiei, s-ar părea că cele două moduri nu ar fi compatibile, iar acceptarea lor ar însemna principiul în cauză. Însă, susţine Gh. Enescu, „conceptul poate fi considerat în acelaşi timp corect, dar incompatibil cu legile obişnuite ale teoriei. Conceptul nu este subsumat corect teoriei. Dacă *mulţime* în sens corect înseamnă compatibil cu legile teoriei, aceasta înseamnă că noţiunea ultralargă *nu este corect* să fie considerată mulţime, dacă totuşi *mulţime* înseamnă ceva mai mult decât noţiunea obişnuită atunci nu este corect să i se aplice legile obişnuite. Prin urmare, nu avem acelaşi raport, ci moduri diferite de a ne raporta. Confuzia raporturilor generează antinomia."[46]

Revenind la caracterul convenţional al asigurării coerenţei logice, invocat de A. Dumitriu, care ar provoca dubii privind însăşi necesitatea teoretică a logicii[47], trebuie menţionat că în concepţia modernă a logicii sensul originar de *teorie* – cunoaştere directă a principiilor, pe care logica îl avea în Antichitate (în special, la Aristotel) – se diluează, accepţiunea principală fiind acum cea de *sistem*[48], o serie de propoziţii legate coerent, principala condiţie fiind non-contradicţia.

Odată cu formalizarea, logica nu va mai avea ca obiect de studiu un obiect sau nişte obiecte particulare, ci înseşi propoziţiile care se pot forma cu privire la aceste obiecte. În plus, propoziţiile sunt considerate ca fiind golite de orice conţinut, simboluri – relaţii între simboluri –, litere, logica nu avea să mai fie în mod primordial o ştiinţă a principiilor gândirii şi a legilor ei. Evoluţia axiomaticii duce la părăsirea treptată a conţinuturilor conceptelor şi propoziţiilor cu care se construieşte o ştiinţă. În cazul sistemului formal al logicii, definiţia implică după A. Dumitriu unele dificultăţi care privesc caracterul suficient al axiomaticii în

[46] *Ibidem*, p. 182.
[47] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 63.
[48] Din termenul grecesc σύστημα, format din particula σύν (cu) şi verbul στάω (a sta în picioare), a fi coordonat într-un ansamblu împreună cu alte părţi.

determinarea unei ştiinţe[49], determinate în parte de evoluţia axiomaticii în sensul renunţării treptate a conţinuturilor conceptelor şi propoziţiilor cu care se construieşte o ştiinţă.

Relativitatea termenilor primitivi şi a formulelor primitive este *intrinsecă* sistemelor formale.

> „Trecerea la axiomatica formală modifică profund sensul axiomaticii: prioritatea acordată enunţurilor luate ca punct de plecare devine într-adevăr în întregime relativă. Ea nu mai este fondată pe simplicitate sau pe un mai mare grad de evidenţă, ci numai pe comoditate. Alegerea iniţială este cu totul arbitrară. În principiu, orice sistem de enunţuri poate fi luat ca sistem de axiome; singurul lucru care interesează este să se poată deduce din ele întreaga teorie. Cu alte cuvinte, sistemul axiomatic nu mai are ca scop să facă să apară ordinea naturală care există între enunţurile unei teorii, ci de a introduce o ordine care, în sine, poate fi oricare alta”[50]

În cazul sistemelor formale, aşa cum remarcă A. Dumitriu, această relativitate este generată de lipsa oricărei semnificaţii a simbolurilor, nepunându-se în vreun fel problema priorităţii în alegerea simbolurilor iniţiale, ci numai dezideratul posibilităţii deducerii întregii teorii pornind de la acestea.

> Această situaţie relativă a enunţurilor şi termenilor primitivi este o consecinţă absolut necesară care rezultă din *natura* unui *sistem formal*. Ea nu poate fi remediată în condiţiile în care se construieşte un sistem formal: această relativitate şi alegerea arbitrară a unor termeni şi enunţuri faţă de ceilalţi termeni şi enunţuri din sistem aparţin intrinsec sistemului formal ca atare[51].

În acest sens, expresiile (definiţii sau tautologii) formate în interiorul sistemului formal al logicii clasice din *Principia Mathematica* exprimă cele trei idei primitive ale sistemului, ceea ar însemna că întregul sistem se poate reduce la acestea fără să exprime „nimic mai mult decât ceea ce s-a pus în fruntea lui în mod convenţional”[52]. Acest rezultat s-ar aplica oricărui sistem echivalent al logicii clasice, oricare ar fi ideile primitive alese şi oricare ar fi axiomele lui.

> Orice sistem formal al logicii este de natură pur *analitică*, fiindcă orice semn nou şi orice formulă nouă nu exprimă în jocul semnelor primitive decât semnificaţia acestor semne. Deci într-un sistem formal al logicii, tot ce cunoaştem se găseşte în semnele lui primitive[53].

Examinând ideile primitive al sistemului formal din *Principia Mathematica* (1. *variabila propoziţională* care nu poate lua decât una dintre cele două valori: A (adevărat) şi F (fals); 2. ideea de *negaţie*; 3) ideea de *disjuncţie*), A. Dumitriu

[49] A. Dumitriu, *Teoria logicii…*, p. 8.
[50] J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, Paris, Louvain, 1957, p. 37.
[51] A. Dumitriu, *Teoria logicii*, p. 20.
[52] *Ibidem*, p. 50.
[53] *Ibidem*, p. 53.

consideră că, odată cu prima dintre aceste idei primitive, se presupun atât principiul terţului exclus exclus *ipso facto* (a treia posibilitate nu există…), cât şi principiul non-contradicţiei (o valoare şi numai una cu excluziunea celeilalte)[54]; „acceptarea variabilelor propoziţionale bivalente presupune principiul terţului exclus şi al contradicţiei, care sunt exprimate într-un mod implicit prin chiar enunţul acestei acceptări"[55].

Odată cu introducerea celei de-a doua idei primitive, *negaţia* (~), explicitează principiul non-contradicţiei cuprins deja în prima idee primitivă şi arată că o variabilă propoziţională nu poate lua simultan cele două valori *A* şi *F*. Cea de-a treia idee primitivă, *disjuncţia* (∨), nu ar fi de fapt o idee logică propriu-zisă, deoarece aceasta nu este strict necesară pentru a exprima principiul terţului exclus şi principiul non-contradicţiei. Ca şi negaţia, aceasta ar fi de ordin lingvistic, având, ca şi toţi ceilalţi 16 functori utilizaţi în *Principia Mathematica*, rolul de a simplifica exprimarea. Astfel, consideră A. Dumitriu, „edificiul întreg al sistemului logico-formal din *Principia Mathematica* este construit pe baza principiului contradicţiei şi a principiului terţului exclus, care, în logica formalizată bivalentă, nu este decât acelaşi lucru exprimat numai diferit, celelalte idei primitive, negaţia şi disjuncţia neservind decât la formularea mai facilă şi mai pregnantă a acestor principii"[56].

Principala concluzie indică faptul că logica clasică, prezentată de logicienii contemporani ca un sistem formal, nu este un sistem deductiv. De asemenea, problema non-contradicţiei este problema logică esenţială a oricărui sistem logico-formal, celelalte probleme (completitudinea şi independenţa axiomelor etc.) sunt „probleme de economie a sistemului" şi depind de alegerea convenţională a noţiunilor primitive. Astfel că, încercarea de explicare a procesului logico-matematic printr-un sistem formal al logicii se reduce la o problemă de non-contradicţie[57].

[54] *Ibidem*, p. 56.
[55] *Ibidem*, p. 58.
[56] *Ibidem*.
[57] *Ibidem*, pp. 65–68.