PRINCIPIA MATHEMATICA DUPĂ 100 DE ANI. UN ESEU EXPOZITIV

MIRCEA DUMITRU
Universitatea din Bucureşti
Academia Română

***Principia Mathematica*, 100 Years after. An Expository Essay**. The paper is an expository essay in which I discuss the main goals, concepts, problems, and results of Whitehead's and Russell's *Principia Mathematica* (1910–1913) at its centennial anniversary. The great work by Whitehead and Russell may not be the birth certificate of modern logic, but it is nevertheless the legitimacy and consecration certificate of modern mathematical logic and of the logicist program into contemporary philosophy of mathematics. The emphasis is laid upon the presentation of sentential and predicate logic, identity, singular definite descriptions, set-theoretic and semantic paradoxes, and type theory.

Keywords: Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, sentential logic, predicate logic, identity, singular definite descriptions, logicism, set-theoretic and semantic paradoxes, type theory.

S-a remarcat, oarecum malițios, că trăsătura distinctivă a operelor clasice este aceea de a fi abundent citate, dar rareori citite şi nicidecum serios studiate. Poate că aceasta este şi situația lucrării lui A. N. Whitehead & B. Russell pe care o celebrăm azi, la o sută de ani de la apariția a ceea ce Willard Quine a caracterizat ca fiind „unul dintre cele mai mărețe monumente intelectuale ale tuturor timpurilor: cele trei volume ale lucrării *Principia Mathematica*"[1]. În acest eseu expozitiv, doresc să argumentez că *Principia* merită citită şi studiată nu numai pentru valoarea ei istorică incontestabilă, ci şi pentru actualitatea şi fertilitatea concepțiilor prezentate, a metodelor puse în lucru şi a viziunii pe care o transmite.

Scopul meu în cele ce urmează este, aşadar, să prezint, într-o manieră în primul rând expozitivă, principalele obiective, concepte, probleme şi realizări ale acestei opere care, dacă nu este chiar actul de naştere al logicii matematice moderne – acesta fiind legat de opera lui Frege *Begriffsschrift* (1879) –, atunci este cel puțin actul de legitimare şi de consacrare a logicii matematice şi a programului logicist în filosofia matematicii.

[1] W. V. O. Quine, „Whitehead and the Rise of Modern Logic", în W. V. O. Quine, *Selected Logic Papers*, 1966, 1995, p. 14.

Rev. filos., **LXII**, *2*, p. 173–181, Bucureşti, 2015

Whitehead & Russell expun clar, chiar în primele cuvinte ale Introducerii, care sunt obiectivele operei lor. Logica matematică – prezentată în Partea I a lucrării – a fost construită având ca puncte de orientare trei scopuri diferite: (1) efectuarea unei analize cât se poate de profunde a demonstraţiilor matematice, însoţită de minimizarea ideilor nedefinite şi a propoziţiilor nedemonstrate (numite şi idei *primitive* şi propoziţii *primitive*) de la care pornesc aceste demonstraţii; (2) exprimarea clară, precisă şi riguroasă, în simbolurile notaţiei lui Russell-Peano, a propoziţiilor matematice; (3) rezolvarea paradoxurilor care, în anii conceperii şi elaborării lucrării *Principia Mathematica*, au preocupat, prin dificultatea şi implicaţiile lor, pe cei care se ocupau de logica simbolică şi de teoria mulţimilor. Convingerea lui Whitehead & Russell este că „teoria tipurilor, aşa cum este elaborată în *Principia Mathematica*, conduce atât la evitarea contradicţiilor, cât şi la detectarea cu precizie a sofismului care dă naştere acestor contradicţii”[2].

În contribuţia de faţă, urmăresc să expun şi să comentez care sunt acele realizări exemplare principale care răspund acestor trei scopuri diferite şi cum anume se constituie toate acestea într-o fertilă moştenire care legitimează acest topos central pentru teoria logică actuală, anume *Logica Matematica* a lui Russell după un secol de la conceperea ei.

Logica lui Peano, pe care Russell o îmbunătăţeşte şi o dezvoltă, îi atrage atenţia lui Whitehead în 1900, cu câţiva ani înainte de începutul fructuoasei sale colaborări cu Russell. Whitehaed notează: „Cred că inventarea simbolismului lui Peano şi Russell... constituie un moment epocal în raţionamentul matematic”[3]. De ce? În primul rând, pentru că această notaţie nouă şi revoluţionară emerge ca un instrument indispensabil pentru explorarea teoriei numerelor cardinale infinite a lui Cantor. Din nou Whitehead: „Natura abstractă a acestui subiect face ca limbajul obişnuit să fie întru totul ineficient, dobândind precizie numai cu preţul verbiajului, iar imaginaţia este foarte înşelătoare, deoarece ne prezintă agregate speciale care sunt denumerabile sau de puterea continuumului. Suntem astfel conduşi către o deducţie logică strictă, prin intermediul metodei simbolice.”[4]

Principia Mathematica apare, într-o primă ediţie, la Cambridge, în trei volume astfel: volumul I, în 1910, volumul al II-lea, în 1912, iar volumul al III-lea, în 1913. O a doua ediţie apare între 1925–1927, tot la Cambridge. Introducerea şi anexele noi ale celei de-a doua ediţii sunt opera exclusivă a lui Russell; Whitehead nu a contribuit cu nimic la modificările şi adăugirile operate în această a doua ediţie. Astăzi, pentru scopuri exegetice şi de cercetare în domeniul logicii filosofice,

[2] A. N. Whitehead & B. Russell, *Principia Mathematica to *56*, Cambridge University Press, 1997, p. 1.

[3] A. N. Whitehead, „On cardinal numbers”, în *American Journal of Mathematics*, 1902, p. 367, apud W. V. O. Quine, *Selected Logic Papers. Enlarged Edition*, Harvard University Press, 1966, 1995, p. 13.

[4] A. N. Whitehead, idem.

al filosofiei logicii şi matematicii, este folosită o ediţie abreviată, anume *Principia Mathematica to * 56*, publicată tot de Cambridge University Press, în 1960 şi cu republicări succesive până în 1997.

Partea I din *Principia* este dezvoltată în prima jumătate din primul volum şi poartă numele „Logică matematică”. Ea începe cu cea mai simplă interpretare propoziţională a algebrei booleene. Literele ‘*p*’, ‘*q*’ etc. sunt folosite ca variabile propoziţionale. Operatorii booleeni sunt reinterpretaţi, în contextul logicii propoziţiilor, drept negaţie, disjuncţie şi conjuncţie. Numai primii doi sunt stipulaţi ca fiind primitivi sau nedefiniţi; cel de-al treilea, conjuncţia, este definit, în maniera cunoscută, în termenii negaţiei şi disjuncţiei. Alţi compuşi propoziţionali sunt ‘$p \supset q$’ şi ‘$p \equiv q$’, definiţi şi ei prin negaţie şi disjuncţie şi interpretaţi în limbaj natural prin ‘*p* implică *q*’ şi, respectiv, prin ‘*p* este echivalent cu *q*’.

Sunt adoptate cinci legi drept axiome formale, una dintre ele – asociativitatea disjuncţiei – fiind demonstrată din celelalte patru, de către P. Bernays, în 1926, şi declarată ca redundantă. Rămân, astfel, patru axiome: idempotenţa, adjuncţia, comutativitatea, slăbirea implicaţiei materiale prin disjuncţie. Câteva sute de legi sunt deduse din aceste axiome drept teoreme. Sunt folosite două proceduri deductive: *substituţia* variabilelor cu expresii bine formate şi *modus ponens*. Aceste reguli cer consideraţii metalogice clare, pentru a le formula ca reguli *despre* expresii care apar în axiome şi teoreme. De remarcat, totuşi, că Russell este destul de nonşalant, chiar neglijent, cu statutul metalogic al acestor reguli: nivelul de claritate este cu mult sub acela cu care ne obişnuise opera lui Frege, iar regula substituţiei este lăsată cu totul în mod tacit.

Pentru Whitehaed şi Russell, definiţiile în sistem sunt convenţii de abreviere/ prescurtare. Luate drept convenţii de prescurtare, aceste definiţii sunt inatacabile; dispute apar, în mod legitim, la orice încercare de parafrazare în limbaj natural, idiomatic, a semnelor logice prin cuvinte. Este simbolul logic „punctul” interpretabil prin conjuncţia „şi”, „potcoava” prin „implică” şi cele „trei linii paralele şi orizontale” prin „este echivalent cu”? În această privinţă sunt de notorietate obiecţiile ridicate de C. I. Lewis şi de W. Quine în mod independent. Paradoxurile implicaţiei materiale – fiecare propoziţie falsă implică orice propoziţie şi fiecare propoziţie adevărată este implicată de către orice propoziţie – sunt obstacole serioase în calea adoptării lecturii acestor două simboluri drept implicaţie şi echivalenţă. Quine, cred eu, diagnostichează corect situaţia: dacă Russell ar fi trasat cu grijă şi în mod sistematic distincţia dintre utilizare şi menţionare, atunci ar fi observat că operatorii veri-funcţionali conectează propoziţii (aşa încât potcoava şi cele trei linii urmează să fie citite „numai dacă” şi, respectiv, „dacă şi numai dacă”, adică prin expresii care formează corect compuşi propoziţionali din propoziţii mai simple), în timp ce implicaţia şi echivalenţa sunt relaţii logice între propoziţii, şi pentru a le exprima utilizăm verbele „implică” şi, respectiv, „este echivalent cu” între numele propoziţiilor între care se enunţă acele relaţii. Pe scurt, în cazul din urmă, propoziţiile nu sunt utilizate pentru a alcătui compuşi propoziţionali condiţionali sau bicondiţionali, ci sunt menţionate pentru a atrage atenţia asupra relaţiei de implicaţie logică sau de echivalenţă logică între ele[5]. Quine este, ca de obicei în astfel de chestiuni subtile, de o claritate de cristal: „Este regretabil că respectării scrupuloase de către Frege, a acestei distincţii dintre o expresie şi numele ei, dintre utilizare şi menţionare, i s-a acordat atât de puţină atenţie de către Whitehead, Russell şi de către criticii lor."[6]

În *Principia*, compuşii logici propoziţionali sunt în exclusivitate veri-funcţionali: valoarea de adevăr a compusului (adevărul sau falsul) rămâne identică/ nemodificată atunci când orice parte bine formată adevărată este substituită cu orice formulă adevărată şi orice parte falsă este substituită cu orice formulă falsă. Acest principiu ne asigură că teoria logică va fi suficient de simplă. Abateri de la acest principiu au generat discuţii, profitabile uneori (unele controverse asupra acestui subiect au alimentat procesul de construire a logicilor modale).

Următoarea porţiune a Părţii I tratează teoria cuantificării. Această teorie urmează, în esenţă, teoria cuantificării a lui Frege. Notaţia lui Whitehead şi Russell este, însă, mai convenabilă, dar tratarea subiectului de către Frege este mult mai riguroasă. Cuantificarea universală rezidă în concatenarea cuantificatorului universal, „pentru oricare obiect x", cu o expresie care are forma unei propoziţii, în care reapare variabila din cuantificator. Cuantificarea existenţială constă în aplicarea prefixului „există cel puţin un obiect x" unei expresii propoziţionale deschise, similare unei propoziţii. Cei doi cuantificatori standard sunt interdefinibili cu ajutorul negaţiei, după echivalenţa binecunoscută: „$(\exists x)\varphi x$" este o prescurtare pentru „$\sim(\forall x)\sim\varphi x$". Quine numeşte expresiile propoziţionale deschise *matrici*. Whitehead şi Russell adaugă două axiome specifice cuantificării: instanţierea universalului şi distribuirea universalului. La procedurile deductive din logica propoziţiilor se adaugă regula substituţiei pentru matrici (formulată corect de Hilbert şi Ackermann), regula reliterării sau a variantei alfabetice utilizată în legătură cu cuantificatorii şi regula introducerii cuantificatorilor. Formularea acestor reguli este dificilă şi este lăsată în mod tacit.

Este important de observat cum în aceste concepte şi notaţii formale, care par inofensive, germinează seminţele unor concepţii metafizice, care pot fi pre-condiţii de inteligibilitate pentru un calcul logic. Posibilitatea de a cuantifica predicatele care apar în matrici şi de a le trata, astfel, drept variabile predicat face ca trecerea de la o teorie a cuantificării la una a atributelor să fie atât de lină încât să nu mai putem aprecia corect diferenţa importantă de încărcătură ontologică a celor două teorii diferite. Detaliile tehnice ale acestei tranziţii sunt destul de complicate şi nu este aici locul să spunem întreaga poveste a modului cum nişte inofensive manevre tehnice pot conduce la o ontologie platonică a universaliilor (denunţată viguros de Quine). Chestiunea ridică probleme atât tehnice cât şi metafizice dificile şi foarte importante. Printre altele, se ridică problema dacă o logică de ordinul al doilea sau

[5] Cf. W. V. O. Quine, 1966, 1995; p. 16.
[6] W. V. O. Quine, 1966, 1995; p. 17.

superioară acesteia este o logică autentică, sau dacă nu cumva unica logică legitimă *ca logică* este aceea de ordinul întâi (aşa cum, din nou, insistă Quine)[7]. Oricum, sintetizând acele pasaje relevante pentru chestiunea noastră din *Principia*, să reţinem că, folosind variabile-predicat ca variabile ale cuantificării, Whitehead şi Russell fac trecerea de la o teorie a cuantificării la o teorie a atributelor, care implică dincolo de noţiunea de cuantificare şi pe aceea de atribuire. Distincţia nu este clar trasată şi de aceea nici recunoscută. Expresia cheie „funcţie propoziţională" este folosită ambiguu pentru a desemna expresiile denumite mai înainte matrici, dar şi obiectele abstracte (universaliile) denumite atribute (când literele predicat apar în cuantificatori sunt tratate ca variabile predicat care au capacitatea referenţială a oricăror variabile obiect sub asignări; aceste variabile predicat se vor referi la entităţi abstracte, şi anume *atribute*, drept valori ale lor).

Identitatea, concept esenţial pentru logică şi matematică, este definită în mod propriu de către Whitehead şi Russell în interiorul teoriei atributelor şi nu în teoria cuantificării. Pentru a defini simbolul identităţii, urmează să se cuantifice asupra predicatelor în felul acesta: „$x = y$" înseamnă „Fiecare atribut al lui x este un atribut al lui y şi reciproc".

O altă ramură foarte importantă a teoriei logice pe care o dezvoltă cei doi autori în *Principia* este aceea a descripţiilor definite singulare. Russell s-a ocupat îndelung cu chestiunea semnificaţiei simbolurilor descriptive definite. Importanţa acestui capitol rezidă nu numai în înţelegerea modului cum funcţionează aceste expresii în limbajul obişnuit (pentru aceasta, a se vedea articolul epocal al lui Bertrand Russell, *On Denoting* (1905)), ci şi în contextul limbajelor formale logico-matematice, în care expresiile care redau funcţii sunt analizabile şi definibile prin intermediul descripţiilor definite singulare. Russell continuă o linie de analiză deschisă de Frege şi Peano, dar este primul care dezvoltă, în mod original, ideea că descripţiile sunt simboluri incomplete, non-referenţiale în pofida aparenţelor contrare, care nu au semnificaţie luate în mod izolat, ci doar în contextul apariţiei lor în limbaj şi care – mai mult – sunt definibile în termenii unui aparat logic fundamental, în care apar noţiunile de cuantificare, predicaţie şi identitate – adică noţiuni care nu au capacitate referenţială. Definiţia lui Russell, în *Principia*, este una contextuală: o descripţie este explicată nu în mod izolat, ci ca parte a unui context mai larg, care este definit ca întreg. De pildă, un context în care apare o descripţie, de felul „$\psi(\iota x)\phi x$", este explicat drept o abreviere pentru „$(\exists y)(\forall x)((\varphi x \equiv x = y) \ \& \ \psi y)$". Pe scurt, Teoria lui Russell cu privire la descripţii poate fi rezumată astfel: o expresie descriptivă nu denotă nimic, ci are semnificaţie numai în context. De pildă, enunţul, „Autorul lui *On Denoting* este britanic" este definit prin: „Există o singură entitate care a conceput/a scris *On Denoting* şi indiferent cine a conceput/a scris *On Denoting*, acesta este britanic".

[7] Abordez pe larg toată această problematică ontologică şi logică în M. Dumitru, 2001; p. 187–228.

Deci, un enunț care conține expresia denotativă „autorul lui *On Denoting*" nu asertează (stricto-sensu) nimic despre Bertrand Russell (la urma urmei, nu conține niciun constituent care să-l denote pe Russell), şi nu este nimic altceva decât o modalitate de a aserta indirect (ocolit) ceva despre conceptele exprimate de termenii constitutivi ai expresiei descriptive. Russell produce două argumente în favoarea acestei teorii: (1) o expresie descriptivă poate fi folosită cu sens, chiar dacă obiectul descris nu există („Regele actual al Franței este chel" sau „Regele actual al Franței nu există"); (2) putem înțelege un enunț care conține o expresie descriptivă fără a cunoaşte în mod nemijlocit sau a fi familiarizați cu (*aquainted with*) obiectul descris, dar pare să fie imposibil să înțelegem un enunț fără ca noi, cei care suntem subiecți ai cunoaşterii, să fim în mod nemijlocit în relație cognitivă cu obiectul despre care enunțul produs de noi asertează ceva.

Cea mai importantă parte a cercetărilor lui Russell din *Principia* este, însă, fără îndoială aceea în care el analizează conceptele implicate în paradoxurile set-teoretice şi semantice şi soluția pe care le-o dă acestora (teoria tipurilor). Russell are meritul istoric de a fi descoperit primul că principiile naive (non-axiomatice) care guvernează teoria mulțimilor a lui Cantor sunt inconsistente. El reuşeşte să prezinte forma pură a acestui paradox care-i poartă numele, epurat de orice jargon tehnic-matematic, punând în relief faptul, realmente îngrijorător, că intuiții logice comune pe care le împărtăşeşte orice om educat cu privire la noțiuni cum ar fi adevăr, fals, funcție, proprietate, concept, clasă, relație, cardinal, ordinal, nume, definiție sunt autocontradictorii, dacă se pierde din vedere ambiguitatea lor tipică, ajungând să genereze o totalitate care conține membri definiți în termenii totalității înseşi şi să producă, pe această cale, sofisme ale cercului vicios, care, potrivit lui Russell, sunt răspunzătoare şi de producerea paradoxurilor set-teoretice şi semantice deopotrivă[8].

Astfel, diagnosticul principal pe care ajunge să-l pună Russell este acela că axioma eronată, răspunzătoare de producerea paradoxului, este un principiu nerestricționat al comprehensiunii, care la prima vedere pare să fie evidența întruchipată: pentru fiecare proprietate sau condiție exprimată de către o funcție propozițională, există o clasă de obiecte care conține exact acele entități care au acea proprietate sau care satisfac acea condiție. Simbolic, în notația lui Russell: $(z \in \hat{x}\varphi x) \equiv \varphi z$. Este suficient să substituim variabila x chiar cu z şi să stipulăm că proprietatea/ condiția φ este aceea de non-apartenență, $x \notin x$, pentru a obține ceea ce se numeşte Paradoxul lui Russell: $(z \in z) \equiv (z \notin z)$. Vestea proastă pentru fundamentele matematicii era că şi logica lui Frege şi aceea a lui Peano, care codifică principiile de constituire şi de raționare din teoria naivă a mulțimilor, sunt infestate de aceeaşi inconsistență.

Russell a nutrit mereu convingerea că toate paradoxurile logice trebuie să aibă o soluție unitară. În această privință, el face notă discordantă față de majoritatea

[8] Cf. A. N. Whitehead & B. Russell, 1997, p. 64.

logicienilor care, sub influența lui Peano și Ramsey, fac o distincție netă între paradoxurile set-teoretice și acelea semantice, insistând asupra unor soluții corespunzătoare diferite. Punctul de vedere al lui Russell este plauzibil, totuși. Toate paradoxurile cunoscute împărtășesc o structură; toate conțin o formă de autoreflexivitate, clar indicată de construcția diagonală, descoperită de către Cantor. Este o cale cât se poate de promițătoare de a căuta o soluție unitară pentru toate paradoxurile.

Russell pune un diagnostic pentru această patologie logică. În foarte influentul său eseu „Mathematical Logic as based on the Theory of Types”, el afirmă că ceea ce au în comun aceste contradicții este „asumpția unei totalități de așa fel încât, dacă ar fi legitimă, ar fi, de îndată, augmentată de către noi membri definiți în termenii totalității înseși”. Ceea ce se ascunde aici este un cerc vicios în definirea acestor entități. Pentru a evita cercul, Russell impune respectarea acestei reguli: „Whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection”. („Ceea ce implică pe *toți* membrii unei colecții nu trebuie să fie unul dintre membrii colecției”.) Mai clar, principiul îmbracă această formă: „Whatever involves an apparent variable must not be among the possible values of that variable”. („Ceea ce implică o variabilă aparentă nu trebuie să fie printre valorile posibile ale acelei variabile”.)[9]

Principiul pe care-l impune Russell, al prohibirii cercului vicios, poate fi interpretat în mod dual: sau ca eliminare a unor colecții drept totalități, sau prohibire a definițiilor impredicative, adică a acelor definiții care identifică un obiect într-o colecție, cuantificând asupra colecției din care face parte acel obiect; e.g., definirea impredicativă a mulțimii N a numerelor naturale drept cea mai mică mulțime N care îl conține pe 0 și care este în așa fel încât $(\forall x)(x \in N \supset x + 1 \in N)$.

Dar în această manevră ingenioasă se ascunde o problemă foarte serioasă: prohibind astfel de definiții, Russell pare să anuleze o bună parte din matematica clasică!

Ce remediu oferă Russell paradoxurilor? Soluția este celebra *teorie a tipurilor*. În comentariul lui Quine, diagnosticul și remediul russelliene pentru această patologie logico-matematică urmează această strategie. „Fiecare clasă este concepută ca aparținând unei entități și numai uneia dintr-o ierarhie de așa-numite tipuri; și orice formulă care enunță apartenența între oricare două clase care nu ocupă poziții consecutive în ierarhia acestor tipuri este respinsă ca fiind lipsită de sens... Astfel, ‘$\alpha \in \alpha$’ și toate contextele în care apare această relație sunt lipsite de sens.”[10] Același lucru pentru negația self-apartenenței, prezentă în paradoxul lui Russell. Teoria tipurilor interzice o astfel de construcție, ca fiind lipsită de sens. Și teoria relațiilor implică contradicții analoage și de aceea teoria tipurilor trebuie extinsă pentru a face loc și relațiilor alături de clase.

[9] B. Russell, 1908, 1967; p. 138.
[10] W. V. O. Quine, 1966, 1995; p. 24.

Oricum, potrivit lucrării *Principia Mathematica*, versiunea fundamentală a teoriei tipurilor nu se aplică nici claselor şi nici relaţiilor, ci „funcţiilor propoziţionale". Un tip este un domeniu de semnificaţie pentru o funcţie propoziţională, adică, altfel spus, este „colecţia argumentelor pentru care numita funcţie are valori"[11]. În acest domeniu (tip), funcţia va fi valorizată cu una şi numai una dintre cele două valori de adevăr clasice, adevărul şi falsul; în afara acestui domeniu (tip), funcţia este lipsită de sens. Se ajunge, astfel, la o restricţie impusă asupra cuantificării: un enunţ despre toate elementele unei colecţii are sens numai dacă acea colecţie este totalitatea sau o parte a domeniului de semnificaţie al unei funcţii propoziţionale.

Ierarhia ramificată a tipurilor rezultă din principiul cercului vicios: „This principle, in our technical language, becomes: 'Whatever contains an apparent variable must not be a possible value of that variable.' Thus whatever contains an apparent variable must be of a different type from the possible values of that variable; we will say that it is of a *higher* type"[12].

Ideea de ierarhie de funcţii propoziţionale este cel mai complet descrisă de Whitehead şi Russell în Introducerea la *Principia Mathematica*, vol. I, în (Whitehaed & Russell, 1997), pp. 37–65. Ierarhia porneşte la nivelul cel mai de jos cu tipul indivizilor, obiecte care nu sunt nici propoziţii şi nici funcţii. Iată cum ne este descrisă imaginea metafizică: „Universul constă din obiecte care au diferite calităţi şi care stau în diferite relaţii între ele. Unele dintre obiectele care apar în univers sunt complexe. Dacă un obiect este complex, el constă din părţi care interrelaţionează. Să considerăm un obiect complex care este compus din două părţi *a* şi *b* care stau una faţă de alta în relaţia *R*. Obiectul complex '*a*-în-relaţia-*R*-cu-*b*' poate fi apt de a fi *perceput*; când este perceput, el este perceput ca un obiect unitar ... Când judecăm '*a* are relaţia *R* cu *b*', judecata noastră se spune că este *adevărată* dacă există un complex '*a*-în-relaţia-*R*-cu-*b*' şi se spune că este *falsă* atunci când lucrurile nu stau aşa. Aceasta este o definiţie a adevărului şi a falsului în relaţia cu judecăţile de acest gen."[13]

Este teoria tipurilor o soluţie pentru problema paradoxurilor? Depinde! Dacă prin „soluţie" înţelegem un mecanism logic prin care să abordăm direct paradoxurile, atunci nu este. Dacă, însă, urmărim o reformă a limbajului care să împiedice formarea paradoxurilor prin eliminarea unor construcţii ca fiind lipiste de sens, atunci teoria tipurilor este o soluţie. Dar sunt aceste construcţii self-referenţiale lipsite de sens? În primul rând, autoreferenţialitatea, pozitivă, nu conduce, neapărat, la paradox: „«mulţimea expresiilor din limba română» este o expresie în limba română" este o construcţie self-referenţială, pozitivă care nu ridică nicio problemă

[11] B. Russell, 1908, 1967, p. 147.

[12] „Acest principiu, în limbajul nostru tehnic, devine: 'Orice conţine o variabilă aparentă trebuie să nu poată fi o valoare posibilă a acelei variabile'. Astfel, orice conţine o variabilă aparentă trebuie să fie de un tip diferit faţă de valorile posibile ale acelei variabile; vom spune că este de un tip *mai înalt*" (B. Russell, 1908, 1967; p. 147).

[13] A. N. Whitehead & B. Russell, 1997; p. 43.

logică specială. Filosofia abundă în construcții self-referențiale. Nu vrem să le aruncăm pe toate peste bord. Așadar, cât de normală și de firească este această teorie, drept soluție pentru paradoxuri? Cât de plauzibilă este o astfel de reformă a limbajului?

Quine pune excelent în relief morala acestor mișcări dialectice de gândire când ne avertizează: „Dar o caracteristică frapantă este aceea că nici una dintre aceste propuneri, inclusiv teoria tipurilor, nu are un fundament intuitiv. Nici una nu are susținerea simțului comun. Simțul comun a intrat în faliment, deoarece eșuează în contradicție. Privat de tradiția sa, logicianul a trebuit să se refugieze în zămislirea de mituri. Mitul cel mai bun va fi acela care va genera o formă de logică dintre cele mai convenabile pentru matematică și pentru științe; și poate că aceasta va ajunge să fie simțul comun al unei alte generații."[14]

Viitorul este, desigur, deschis și greu de deslușit. Este cert, însă, că generațiile de studioși post-*Principia* ai logicii și ai acelui gen de filosofie care face alianță cu logica și-au format și modelat bunul lor simț logic după acest monument intelectual al tuturor timpurilor. Noi toți le suntem datori acestor mari gânditori care au deschis drumuri noi în logica matematică și filosofică de azi.

BIBLIOGRAFIE

Dumitru, Mircea, *Modalitate și incompletitudine*, Paideia, 2001.

Quine, W. V. O., „Whitehead and the Rise of Modern Logic (1941)", în W. V. O. Quine, *Selected Logic Papers*. *Enlarged Edition*, Harvard University Press, 1966, 1995, p. 3–36.

Russell, Bertrand, „Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", în Irving M. Copi și James A. Gould (editori), *Contemporary Readings in Logical Theory*, The Macmillan Company, 1967, p. 135–153.

Urquhart, Alasdair, „*Principia Mathematica*: The First 100 Years", în *The Palgrave Centenary Companion to Principia Mathematica*, Nicholas Griffin și Bernard Linski (editori), Palgrave Macmillan, 2013, p. 3–20.

Whitehead, A.N. & B. Russell, *Principa Mathematica to *56*, Cambridge University Press, 1997.

[14] „But a striking circumstance is that none of these proposals, type theory included, has an intuitive foundation. None has the backing of common sense. Common sense is bankrupt, for it wound up in contradiction. Deprived of his tradition, the logician has had to resort to mythmaking. That myth will be best that engenders a form of logic most convenient for mathematicians and the sciences; and perhaps it will become the common sense of another generation." (W. V. O. Quine, 1966, 1995; p. 27).