TRADUCERI

CARL G. HEMPEL

DESPRE NATURA ADEVĂRURILOR MATEMATICE

1. Problema

Un principiu de bază al cercetării ştiinţifice este ca nicio propoziţie şi nicio teorie să nu fie acceptată fără o întemeiere corespunzătoare. În ştiinţa empirică, în care se includ atât ştiinţele naturii, cât şi cele sociale, temeiul acceptării unei teorii constă în acordul predicţiilor bazate pe teorie cu evidenţa empirică obţinută fie prin experiment, fie prin observaţia sistematică. Însă ce temeiuri justifică acceptarea matematicii? Aceasta este întrebarea pe care îmi propun să o discut în lucrarea de faţă. Pentru raţiuni ce vor deveni mai clare în cele ce urmează, voi folosi termenul „matematică" doar pentru a mă referi la aritmetică, algebră şi analiză – exclus geometria[1].

2. Sunt propoziţiile matematice adevăruri autoevidente?

Unul dintre răspunsurile care au fost date problemei noastre asertează că adevărurile matematice, în contradistincţie cu ipotezele ştiinţei empirice, nu presupun nici evidenţa factuală, nici vreo altă justificare, din cauză că sunt „autoevidente". Această viziune, care orientează în ultimă instanţă deciziile asupra adevărului matematic spre un sentiment al autoevidenţei, întâmpină totuşi câteva dificultăţi. Întâi de toate, unele teoreme matematice sunt atât de greu de obţinut încât până şi specialistului în domeniu ele îi apar oricum, numai autoevidente nu. În al doilea rând, este bine cunoscut că unele dintre cele mai importante rezultate ale matematicii – în special cele din domenii ca teoria abstractă a mulţimilor sau topologia – acţionează contrar unor intuiţii adânc înrădăcinat, precum şi al obişnuitului sentiment al autoevidenţei. În al treilea rând, existenţa conjecturilor matematice, ca aceea lui Goldbach sau Fermat[2], elementare în conţinut, dar nerezolvate până în zilele noastre, arată în mod cert că nu toate adevărurile matematice pot fi autoevidente. În fine, chiar dacă autoevidenţa ar fi atribuită doar postulatelor de bază ale matematicii, din care toate celelalte propoziţii matematice pot fi deduse, ar fi pertinent de observat că judecăţile cu privire la ce poate fi considerat autoevident sunt subiective; ele variază de la persoană la persoană şi, în mod cert, nu pot constitui o bază adecvată pentru deciziile privind validitatea obiectivă a propoziţiilor matematice.

[1] O discuţie privind statutul geometriei se află în C. Hempel, 1945: 7–17.
[2] Studiul lui Hempel a fost scris cu mult înainte de demonstrarea Teoremei lui Fermat (n. trad.).

Rev. filos., **LXII**, *6*, p. 819–832, Bucureşti, 2015

3. Este matematica cea mai generală ştiinţă empirică?

Conform unui alt punct de vedere, promovat în special de John Stuart Mill, matematica însăşi este o ştiinţă empirică ce diferă de alte ştiinţe empirice, cum ar fi astronomia, fizica, chimia etc., sub două principale aspecte: subiectul ei este mai general decât al oricărui alt domeniu al cercetării ştiinţifice, iar propoziţiile ei au fost testate şi confirmate într-o măsură mai mare chiar decât al celor mai tari secţiuni ale fizicii şi astronomiei. Într-adevăr, conform acestui punct de vedere, gradul în care legile matematicii au fost confirmate de experienţele trecute ale omenirii este atât de copleşitor încât – în mod nejustificat – am ajuns să gândim teoremele matematice ca fiind calitativ diferite de ipotezele sau teoriile bine confirmate ale altor ramuri ale ştiinţei: le considerăm ca certe, pe când celelalte teorii sunt gândite, în cel mai bun caz, ca „foarte probabile" sau într-un grad înalt confirmate.

Însă acest punct de vedere este, de asemenea, deschis unor serioase obiecţii. Dintr-o ipoteză cu caracter empiric – cum ar fi, de exemplu, legea lui Newton a gravitaţiei – este posibil a deriva predicţii de genul că în cutare condiţii specificate, cutare fenomene observabile se vor produce. Apariţia acelor fenomene constituie evidenţa confirmatoare, iar neapariţia lor, evidenţa infirmatoare a ipotezei. Urmează, în particular, că o ipoteză empirică este, teoretic vorbind, infirmabilă; cu alte cuvinte, este posibil a indica ce tip de evidenţă, dacă ar fi întâlnită în prezent, ar infirma ipoteza. În lumina acestei observaţii să considerăm în continuare o „ipoteză" simplă din matematică: 3 + 2 = 5. Dacă aceasta este în momentul de faţă o generalizare empirică a experienţelor trecute, atunci va trebui să putem arăta ce fel de evidenţă ne-ar obliga să acceptăm că ipoteza nu a fost, la urma urmelor, general adevărată. Dacă poate fi gândită orice evidenţă infirmatoare a propoziţiei date, următoarea ilustrare poate fi la fel de potrivită pentru ea: punem câţiva microbi pe o lamelă, mai întâi trei, după care încă doi. Numărăm apoi microbii pentru a vedea dacă în situaţia dată 3 adăugat la 2 dă 5. Să presupunem mai departe că numărăm la un loc 6 microbi. Am putea noi considera aceasta drept o infirmare empirică a propoziţiei date, sau cel puţin că ea nu se aplică la microbi? În mod clar, nu; mai curând am putea presupune că am făcut o greşeală de numărare sau că unul dintre microbi s-a divizat între prima şi a doua numărare. În niciun caz însă, faptul descris nu ar putea invalida propoziţia aritmetică în chestiune; aceasta nu afirmă nimic despre comportamentul microbilor, ea stabileşte doar că orice mulţime constând din 3 + 2 obiecte poate fi de asemenea văzută ca având 5 obiecte. Şi aceasta din cauza simbolurilor „ 3 + 2" şi „5" care denotă acelaşi număr: ele sunt sinonime în virtutea faptului că simbolurile „2", „3", „5" şi „+" sunt *definite* (sau tacit înţelese) într-un astfel de mod că identitatea de mai sus are loc ca o consecinţă a semnificaţiilor ataşate conceptelor implicate în ea.

4. Caracterul analitic al propoziţiilor matematice

Enunţul 3 + 2 = 5, aşadar, este adevărat din raţiuni similare cu enunţul, să zicem, că niciun sexagenar nu are vârsta de 45 de ani. Ambele sunt adevărate în virtutea definițiilor sau a stipulărilor similare ce determină sensul termenilor-cheie implicați. Enunțurile de acest tip împărtăşesc câteva caracteristici importante: validarea lor nu cere, în mod natural, nicio evidență empirică, ele pot fi considerate adevărate doar prin analiza semnificațiilor ataşate termenilor pe care îi conțin. În limbajul logicii, propozițiile de acest tip sunt numite analitice sau adevărate *a priori*, ceea ce înseamnă că adevărul lor este logic independent, sau logic anterior, oricărei evidențe experiențiale[3]. Şi, în timp ce enunțurile ştiințelor empirice sunt sintetice şi pot fi validate numai *a posteriori*, fiind în mod constant subiectul revizuirii în lumina noilor evidențe, adevărul enunțurilor analitice poate fi stabilit definitiv, odată pentru totdeauna. Totuşi, această caracteristică a „certitudinii teoretice", specifică propozițiilor analitice, are de plătit un preț foarte scump: un enunț analitic nu transmite nicio informație factuală. Enunțul noastru privind sexagenarii, de exemplu, nu asertează nimic care ar putea intra în conflict cu vreo evidență factuală: ea nu are nicio implicație factuală, niciun conținut empiric; şi în mod sigur acesta este motivul pentru care enunțul poate fi validat fără recurs la evidența empirică.

Să ilustrăm această înțelegere a naturii propozițiilor matematice prin referire la un alt exemplu de adevăr matematic – sau mai degrabă logic –, frecvent citat, şi anume, propoziția că dacă $a = b$ şi $b = c$, atunci $a = c$. Pe ce bază această aşa-zisă „tranzitivitate a identității" poate fi asertată? Este ea de natură empirică, şi de aceea infirmabilă, cel puțin teoretic, prin evidențe empirice? Să presupunem, de exemplu, că a, b, c sunt anumite nuanțe de verde şi că, în măsura în care noi putem distinge, $a = b$ şi $b = c$, însă în mod clar $a \neq c$. Acest fenomen se produce în mod actual sub anumite condiții; dar îl considerăm noi o evidență infirmatoare pentru propoziția în cauză? Fără îndoială că nu; am argumenta că dacă $a \neq c$, este imposibil ca $a = b$ şi $b = c$; între termenii a cel puțin uneia dintre aceste ultimele perechi de propoziții ar trebui să obținem o diferență, deşi, poate, doar una subliminală. Abandonăm astfel posibilitatea infirmării empirice, precum şi ideea că un test empiric ar fi relevant aici, în baza faptului că identitatea este o relație tranzitivă în virtutea definiției sale sau a postulatelor care o guvernează[4]. Principiul în chestiune este, prin urmare, adevărat *a priori*.

5. Matematica – sistem deductiv axiomatizat

Am argumentat până acum că validitatea matematicii nu constă nici în pretinsul său caracter autoevident, nici într-o bază empirică anume, ci derivă din

[3] Obiecția formulată uneori este că fără un anume tip de experiență, cum ar fi întâlnirea unor obiecte de acelaşi fel, întregii şi operațiile aritmetice nu ar fi fost niciodată inventate şi că, prin urmare, propozițiile aritmeticii au o bază empirică. Acest tip de argument implică, totuşi, o confuzie între sensul logic şi sensul psihologic al termenului „bază". Se poate foarte bine întâmpla ca anumite experiențe să ocazioneze psihologic formarea de idei aritmetice şi în acest sens să formeze o „bază" empirică pentru ele; însă acest lucru este complet nerelevant pentru întrebările logice privind *temeiurile* în virtutea cărora propozițiile aritmetice pot fi acceptate ca adevărate. Observația făcută mai sus este că nicio „bază" empirică, sau evidență în general, nu este cerută pentru stabilirea adevărului propozițiilor aritmeticii.

[4] O descriere precisă a definiției relației de identitate, precum şi caracteristicile esențiale ale acesteia pot fi găsite la A. Tarski 1941: cap. 3.

stipulările ce determină înțelesul conceptelor ei şi că propozițiile matematicii sunt esențialmente „adevăruri prin definiție”. Această ultimă afirmație este, evident, ultrasimplificată şi necesită reluarea în vederea unei mai atente justificări.

Pentru riguroasa dezvoltare a unei teorii matematice nu se pleacă pur şi simplu de la o mulțime de definiții, ci mai degrabă de la un set de propoziții nedefiniționale, care nu sunt demonstrate în cadrul teoriei; acestea sunt postulatele sau axiomele teoriei[5]. Ele sunt formulate în termenii unor concepte de bază, sau concepte prime, pentru care nicio definiție nu este dată în cadrul teoriei. Se afirmă uneori că posulatele reprezintă „definițiile implicite” ale termenilor primi. O astfel de caracterizare a postulatelor este totuşi derutantă. Pentru că, în timp ce postulatele limitează, într-un mod specific, sensurile ce pot fi atribuite termenilor primi, orice sistem autoconsistent de postulate admite, totuşi, mai multe interpretări diferite ale termenilor primi (aceasta urmează a fi arătat), pe când o mulțime de definiții, în sensul strict al cuvântului, determină sensurile celor definite într-o manieră unică.

Odată ce termenii primi şi postulatele au fost date, teoria este complet determinată; ea este derivabilă din baza sa postulațională în felul următor: orice termen al teoriei este definibil în termenii primi şi orice propoziție a teoriei este logic deductibilă din postulate. Pentru a fi precişi până la capăt, este de asemenea necesar să se specifice principiile logice utilizate în demonstrațiile propozițiilor, adică în deducția lor din postulate. Aceste principii pot fi date explicit. Ele se împart în două grupe: propozițiile prime sau postulatele logicii (cum ar fi: dacă este cazul că *p* şi *q*, atunci este cazul ca *p*) şi regulile de deducție sau inferențele (cum ar fi, de exemplu, familiara regulă *modus ponens*, precum şi regulile de substituție care dau posibilitatea inferării dintr-o propoziție generală a oricărei instanțe substituționale). O discuție mai detaliată a structurii logicii şi a conținutului ei ne-ar duce însă prea departe în contextul acestui articol.

6. Sistemul de axiome al lui Peano ca bază a matematicii

Să considerăm acum un sistem de postulate din care întreaga aritmetică a numerelor naturale poate fi derivată. Acest sistem a fost construit de matematicianul şi logicianul italian G. Peano (1858–1932). Termenii primi ai sistemului sunt „0”, „număr” şi „succesor”. Desigur că atâta timp cât nicio definiție nu este dată, simbolul „0” este intenționat a denota numărul 0, în sensul lui uzual, iar termenul „număr” desemnează în mod exclusiv numerele naturale 0, 1, 2, 3, ... Prin succesorul unui număr natural *n*, care va fi notat uneori cu *n*’, se înțelege numărul natural imediat următor lui *n* în ordinea naturală a numerelor. Sistemul lui Peano conține următoarele 5 postulate:

P1. 0 este număr.
P2. Succesorul unui număr este tot un număr.
P3. Niciodată două numere nu au acelaşi succesor.

[5] Pentru o lucidă şi concisă descriere a metodei axiomatice, vezi Tarski 1941: cap. 6.

P4. 0 nu este succesorul niciunui număr.

P5. Dacă *P* este o proprietate astfel că (*a*) 0 are proprietatea *P*, şi (*b*) ori de câte ori un număr *n* are proprietatea *P*, succesorul lui are, de asemenea, proprietatea *P*, atunci orice număr are proprietatea *P*.

Ultimul postulat este principiul inducţiei matematice şi ilustrează, într-o manieră evidentă, impunerea unui „adevăr” matematic prin stipulare. Construcţia aritmeticii elementare pe această bază începe cu definiţiile diferitelor numere naturale. 1 este definit ca succesorul lui 0 sau, mai scurt, ca 0’; 2, ca 1’; 3, ca 2’ şi aşa mai departe. În virtutea lui P2, acest proces poate fi continuat indefinit; pe baza lui P3 (în combinaţie cu P5), procesul nu va duce niciodată la un număr anterior definit şi, în baza lui P4, nu va duce niciodată la 0.

Ca pas următor putem da definiţia adunării, care exprimă, într-o formă precisă, ideea că adunarea oricărui număr natural la un număr dat poate fi considerată ca o adunare repetată a lui 1; ultima operaţie este uşor de exprimat prin relaţia succesor. Această definiţie a adunării arată după cum urmează:

D1 (*a*) $n + 0 = n$; (*b*) $n + k' = (n + k)'$.

Cele două stipulaţii ale acestei definiţii recursive determină complet suma a doi întregi oarecare. Să considerăm, de exemplu, suma 3 + 2. Conform definiţiilor lui 2 şi 1, vom avea: 3 + 2 = 3 + 1’ = 3 + (0’)’; prin D1 (*b*), 3 + (0’)’ = ((3 + 0)’)’; însă prin D1 (*a*) şi prin definiţiile numerelor 4 şi 5, ((3 + 0)’)’ = (3’)’ = 4’ = 5. Această demonstraţie face, de asemenea, mai explicite şi mai precise comentariile de la începutul lucrării privind adevărul propoziţiei 3 + 2 = 5: adevărurile în sistemul de aritmetică al lui Peano decurg nu doar din definiţiile conceptelor implicate, ci şi din postulatele ce guvernează aceste concepte. (În cazul particular al exemplului nostru, postulatele P1 şi P2 sunt presupuse a garanta că 1, 2, 3, 4, 5 sunt numere în sistemul lui Peano; demonstraţia generală că D1 determină suma a oricăror două numere face, de asemenea, uz de P5.) Dacă numim postulatele şi definiţiile unei teorii axiomatizate „stipulaţii” privind conceptele teoriei, atunci putem spune că propoziţiile aritmeticii numerelor naturale sunt adevărate în virtutea stipulaţiilor date iniţial pentru conceptele aritmeticii. (Notăm, incidental, că demonstraţia dată formulei 3 + 2 = 5 face uz în mod repetat de tranzitivitatea identităţii; aceasta este acceptată aici ca una din regulile logicii ce pot fi folosite în demonstraţia oricărei teoreme aritmetice; ea este deci inclusă printre postulatele lui Peano, la fel ca orice alt principiu logic.)

Înmulţirea numerelor naturale poate fi şi ea definită prin definiţii recursive care exprimă, într-o formă riguroasă, ideea că produsul *nk* a două numere întregi poate fi înţeles ca sumă a *k* termeni, fiecare termen fiind egal cu *n*.

D2. (*a*) $n \cdot 0 = 0$; (*b*) $n \cdot k' = n \cdot k + n$.

Se pot demonstra acum legile familiare ce guvernează adunarea şi înmulţirea, cum ar fi legea comutativităţii, asociativităţii şi distributivităţii ($n + k = k + n$, $n \cdot k = k \cdot n$, $n + (k + l) = (n + k) + l$, $n \cdot (k \cdot l) = (n \cdot k) \cdot l$; $n \cdot (k + l) = (n \cdot k) + (n \cdot l)$). – În termenii adunării şi înmulţirii pot fi definite, mai departe, operaţiile inverse, de scădere şi împărţire. Se dovedeşte însă că acestea „nu pot fi întotdeauna realizate", că în contradistincţie cu suma şi produsul, diferenţa şi câtul nu sunt definite pentru orice pereche de numere; de exemplu, 7 – 10 şi 7 : 10 sunt nedefinite. Această situaţie sugerează o extindere a sistemului de numere prin introducerea numerelor negative şi a numerelor raţionale.

Se susţine uneori că în efectuarea acestei extinderi noi „presupunem", sau chiar „postulăm", existenţa tipului de numere dorit, cu proprietăţile ce îl fac potrivit scăderii şi împărţirii. Această metodă a simplei postulări pentru ceea ce avem nevoie are avantajele ei, însă, aşa cum arata Bertrand Russell, ea are avantajele furtului faţă de truda cinstită (1919: 71); şi este un fapt remarcabil că numerele negative, ca şi numerele raţionale, pot fi obţinute din termenii primi ai lui Peano prin truda cinstită a construirii de definiţii explicite pentru respectivele numere, fără introducerea de noi postulate sau asumări de vreun fel anume. Orice întreg pozitiv sau negativ – în opoziţie cu numerele naturale care nu au semn – este definibil ca o mulţime de cupluri ordonate de numere naturale; astfel, întregul +2 este definibil ca mulţime a tuturor cuplurilor ordonate (m, n) de numere naturale, cu $m = n + 2$; întregul –2 este mulţimea tuturor cuplurilor ordonate de numere naturale (m, n), cu $n = m + 2$. În mod similar, numerele raţionale sunt definite drept clase de cupluri ordonate de numere întregi. Diferitele operaţii aritmetice pot fi atunci definite prin referire la aceste noi tipuri de numere, iar validitatea tuturor legilor aritmetice ce guvernează aceste operaţii poate fi demonstrată doar în baza postulatelor lui Peano şi a definiţiilor conceptelor aritmetice implicate.

Sistemul astfel extins este totuşi incomplet, în sensul că nu orice număr al lui are o rădăcină pătrată şi, mai general, nu orice ecuaţie algebrică cu coeficienţi în numerele sistemului are o soluţie în sistem. Aceasta sugerează extinderi ulterioare ale sistemului de numere prin introducerea numerelor reale şi, în final, a numerelor complexe. Încă o dată, toată această enormă extindere poate fi realizată doar prin definiţii, fără adăugarea unui singur postulat nou[6]. Pe baza astfel obţinută pot fi definite, pentru numerele noului sistem, diferitele operaţii aritmetice şi algebrice, pot fi introduse conceptele de funcţie, de limită, de derivare şi de integrare, pot fi demonstrate teoremele familiare privind conceptele nou introduse, astfel că, până la urmă, imensul sistem al matematicii schiţat aici se sprijină doar pe baza restrânsă a sistemului lui Peano: orice concept al matematicii poate fi definit cu ajutorul celor trei termeni primi ai lui Peano, şi orice propoziţie a matematicii poate fi dedusă din cele cinci postulate suplimentate cu definiţiile termenilor neprimi[7]. În cele mai

[6] Pentru o descriere detaliată a construcţiei sistemului de numere pe baza axiomelor lui Peano, vezi Russell 1919: în special cap. 1 şi 7. – O prezentare concisă şi riguroasă a acestei construcţii, începând totuşi cu mulţimea numerelor întregi şi nu cu mulţimea numerelor naturale, poate fi găsită în Birkhoff şi MacLane 1941: cap. 1, 2, 3, 5. – Pentru o privire generală asupra construcţiei sistemului de numere, vezi, de asemenea, Young 1911: în special secţiunile 10, 11, 12.

[7] Ca rezultat al remarcabilelor cercetări întreprinse de K. Gödel, este cunoscut că aritmetica, şi *a fortiori* matematica, este o teorie incompletă în următorul sens: în timp ce toate acele propoziţii care aparţin sistemului clasic al aritmeticii, algebrei şi analizei pot fi într-adevăr derivate, în sensul descris mai sus, din postulatele lui Peano, există totuşi alte propoziţii ce pot fi exprimate în termeni pur aritmetici şi care sunt adevărate, dar care nu pot fi derivate în sistemul lui Peano. Şi mai general:

multe cazuri, aceste deducții sunt realizate doar cu principiile logicii formale; totuşi, demonstrațiile unor teoreme privind numerele reale cer anumite asumări neincluse, de regulă, printre acestea din urmă. Este vorba de aşa-numita axiomă a alegerii. Aceasta asertează că, dată fiind o clasă de clase nevide, şi mutual exclusive, există cel puțin o clasă cu exact un element în comun cu fiecare dintre clasele date. În virtutea acestui principiu şi a regulilor logicii formale, conținutul întregii matematici poate fi astfel derivat din modestul sistem al lui Peano – remarcabilă realizare pe linia sistematizării conținutului matematicii şi a clarificării fundamentelor validității ei.

7. Interpretarea termenilor primi ai lui Peano

Ca o consecință a acestui rezultat, întregul sistem al matematicii poate fi luat ca adevărat doar în virtutea definițiilor (şi anume, a definițiilor termenilor matematici neprimi), cu condiția ca cele cinci postulate ale lui Peano să fie adevărate. Strict vorbind însă, noi nu putem în acest moment să ne referim la postulatele lui Peano ca la propoziții adevărate sau false pentru că ele conțin trei termeni primi cărora nu le-a fost asigurat niciun sens specific. Tot ce putem spune deocamdată este că orice interpretare specifică dată termenilor primi, ce satisface cele cinci axiome – cu alte cuvinte, care transformă axiomele în afirmații adevărate –, vor satisface, de asemenea, toate teoremele deduse din ele. Însă, pentru sistemul lui Peano, există o infinitate de interpretări care fac acest lucru. Să-l luăm, de exemplu, pe 0 ca fiind punctul de origine al unei semidrepte, succesorul unui punct din semidreaptă să-l considerăm a fi punctul la 1 cm distanță de el, iar prin număr să înțelegem orice punct care este sau originea semidreptei, sau orice alt punct ce poate fi obținut din punctul de origine printr-o succesiune finită de paşi, fiecare pas ducând de la punct la succesorul lui. Se poate uşor vedea atunci că toate axiomele lui Peano şi toate teoremele deduse din ele devin propoziții adevărate, deşi interpretarea dată termenilor primi nu este cea obişnuită, menționată la început. Mai general, poate fi arătat că orice progresie, indiferent de natura elementelor ei, realizează o interpretare adevărată, sau un „model", al sistemului lui Peano. Acest exemplu ilustrează observația noastră inițială potrivit căreia un sistem de postulate nu poate fi înțeles ca o mulțime de „definiții implicite" pentru termenii săi primi: sistemul lui Peano permite multiple interpretări diferite, pe câtă vreme, în limbajul obişnuit, ca şi în cel ştiințific, noi ataşăm conceptelor aritmeticii un sens specific. Astfel, de exemplu, în discursul ştiințific şi în cel obişnuit, conceptul 2 este înțeles într-un astfel de mod că din afirmația „Dl. Brown şi dl. Cope, însă nimeni altcineva, sunt în birou, şi dl.

pentru orice sistem de postulate al aritmeticii (de fapt, al matematicii), necontradictoriu, există propoziții adevărate ce pot fi exprimate doar în termeni aritmetici, dar care nu pot fi derivate din postulatele sistemului. Cu alte cuvinte, este imposibil de construit un sistem de postulate necontradictoriu care să conțină printre consecințele sale toate propozițiile ce pot fi formulate în limbajul aritmeticii. Acest fapt nu afectează totuşi rezultatul schițat mai sus, şi anume, că este posibil a deduce din postulatele lui Peano, şi din definițiile adiționale date termenilor neprimi, toate acele propoziții ce constituie teoria clasică a aritmeticii, algebrei şi analizei; acestea sunt propozițiile la care m-am referit mai sus, ca propoziții ale matematicii.

Brown nu este aceeaşi persoană cu dl. Cope" poate fi inferată valid concluzia „Exact două persoane sunt în birou". Însă stipulările prevăzute pentru sistemul lui Peano al numerelor naturale, în particular pentru numărul 2, nu ne permit să tragem o asemenea concluzie; ele nu „determină implicit" sensul obişnuit al conceptului 2 sau al altor concepte aritmetice. Iar matematicianul nu poate achiesa (*acquiesce*) la această deficienţă argumentând că el nu este preocupat de sensul obişnuit al conceptelor matematice; pentru că, în demonstrarea, să zicem, a faptului că orice număr real pozitiv are exact două rădăcini pătrate reale, folosind el însuşi conceptul 2 în sensul obişnuit, veritabila sa teoremă nu poate fi demonstrată fără a presupune despre 2 mai mult decât este stipulat în sistemul lui Peano.

Aşadar, ca matematica să fie o teorie corectă despre conceptele matematice în sensul lor intenţionat nu este suficient să arătăm că întregul sistem este derivabil din postulatele lui Peano, plus definiţiile corespunzătoare; trebuie să arătăm, mai departe, dacă postulatele lui Peano sunt realmente adevărate când termenii lui primi sunt înţeleşi în sensul lor obişnuit. Această chestiune poate fi rezolvată, desigur, numai după ce sensul termenilor „0", „număr natural" şi „succesor" a fost clar definit. O problemă de care ne vom ocupa acum.

8. Definiţiile conceptelor aritmetice în termenii logicii pure

La prima vedere pare lipsită de speranţă încercarea de-a defini aceste concepte aritmetice de bază fără a presupune alţi termeni aritmetici, care ne-ar implica într-o procedură circulară. Totuşi, definiţii de tipul dorit, cât se poate de riguroase, pot fi într-adevăr formulate şi se poate arăta că pentru conceptele astfel definite, toate postulatele lui Peano se transformă în enunţuri adevărate. Acest important rezultat este datorat cercetărilor logicianului german G. Frege (1848–1925), precum şi eforturilor sistematice şi detaliate ulterioare ale logicienilor şi filosofilor englezi contemporani B. Russell şi A.N. Whitehead. Să vedem, pe scurt, care sunt ideile de bază ale acestor definiţii[8].

Un număr natural – sau un număr, în termenii lui Peano – poate fi considerat, în sensul lui obişnuit, drept caracteristica unei anumite *clase* de obiecte. Astfel, de exemplu, clasa apostolilor are numărul 12; clasa quintupleţilor Dionne[9], numărul 5; orice cuplu are numărul 2 şi aşa mai departe. Să exprimăm acum precis sensul aserţiunii că o anumită clasă C are numărul 2 sau, mai scurt, că $n(C) = 2$. Un mic moment de reflecţie ne va arătă că următorul definiens este adecvat înţelesului obişnuit al conceptului 2: există un obiect x şi un obiect y, astfel că (1) $x \in C$ şi $y \in C$, (2) $x \neq y$, şi (3) dacă z este un obiect oarecare, astfel că $z \in C$, atunci sau $z = x$ sau

[8] Pentru o discuţie mai detaliată, a se vedea Russell 1919: cap. 2, 3, 4. O dezvoltare completă a ideii poate fi găsită în Whitehead şi Russell 1910–13, lucrare de înaltă ţinută în domeniul logicii matematice. A se vedea, de asemenea, Quine 1940, pentru o foarte precisă şi recentă dezvoltare a teoriei. – În fine, o discuţie aplicată asupra sistemului lui Peano şi a interpretărilor lui semantice este conţinută în Carnap 1939, în special secţiunile 14, 17, 18.

[9] Autorul face referire la cele cinci fetiţe identice născute în familia Dionne, la 28 mai 1934, într-un sat din Ontario Canada (n. trad.).

$z = y$. (Să notăm că pe baza acestei definiţii devine într-adevăr posibil să inferăm afirmaţia „Numărul persoanelor din birou este 2” din afirmaţia „Dl. Brown şi dl. Cope şi nimeni altcineva sunt în birou şi dl. Brown nu este acelaşi cu dl. Cope”; cu precizarea că C este aici clasa persoanelor din birou.) În mod analog poate fi definit sensul afirmaţiei că $n(C) = 1$: există un obiect x, astfel că $x \in C$, şi orice obiect y, astfel că $y \in C$, este identic cu x. Şi tot astfel sensul obişnuit al afirmaţiei $n(C) = 0$: nu există niciun obiect x astfel că $x \in C$.

Modelul general al acestor definiţii conduce el însuşi la definiţia numărului natural. Să notăm mai întâi că în definiţiile astfel obţinute definiensul nu conţine niciodată vreun termen aritmetic, ci doar expresii luate din domeniul logicii formale, incluzând aici şi semnul identităţii şi al diferenţei. Însă, până acum, noi am definit doar sensul unor propoziţii ca „$n(C) = 2$”, fără a da vreo definiţie numerelor 0, 1, 2, ..., distinctă de context. Acest deziderat poate fi totuşi îndeplinit pe baza faptului că 2 este o proprietate comună tuturor cuplurilor, altfel spus, tuturor claselor C astfel că $n(C) = 2$. O proprietate comună ce poate fi conceptual reprezentată prin clasa tuturor claselor care verifică respectiva proprietate. Ajungem astfel la definiţia: 2 este clasa tuturor cuplurilor sau a tuturor claselor C, astfel că $n(C) = 2$. – Această definiţie nu este în niciun caz una circulară, pentru că conceptul de cuplu – sensul lui „$n(C) = 2$”, în alţi termeni – a fost definit anterior fără nicio referire la numărul 2. Analog, 1 este clasa tuturor claselor unitate, adică a clasei tuturor claselor C pentru care $n(C) = 1$. În sfârşit, 0 este clasa tuturor claselor vide, adică a clasei tuturor claselor fără niciun element. Şi, pentru că există doar o singură astfel de clasă, 0 este în mod simplu clasa al cărui unic element este clasa vidă. În mod clar, sensul obişnuit al oricărui număr natural poate fi definit în acest fel[10]. Însă, pentru a aprecia interpretarea intenţionată a termenilor primi la Peano, dintre toate definiţiile la care ne-am referit aici avem deocamdată nevoie doar de definiţia numărului 0. Rămâne să definim termenii „succesor” şi „întreg”.

Definiţia lui „succesor”, a cărei formulare precisă implică prea multe detalii pentru a fi prezentate aici, este expresia atentă a unei idei simple ilustrată cu următorul exemplu: să considerăm numărul 5, adică clasa tuturor quintupleţilor. Să alegem o clasă arbitrară a acestor quintupleţi şi să-i adăugăm un obiect care nu este unul dintre elementele sale. 5’, adică succesorul lui 5, poate fi atunci definit ca fiind numărul atribuit mulţimii astfel obţinute (care, evident, este un sextuplet). Finalmente se poate formula o definiţie a sensului obişnuit al conceptului de număr natural; această definiţie, care, din nou, nu poate fi dată aici, exprimă într-o formă

[10] Aserţiunea că definiţiile date mai sus stabilesc sensul „obişnuit” al termenilor aritmetici implicaţi trebuie luată în accepţiunea logică şi nu psihologică a termenului „sensul”. Ar fi evident absurd să cerem ca aceste definiţii să exprime „ceea ce toată lumea are în minte” când vorbeşte despre numere şi despre diferitele operaţii ce pot fi făcute cu ele. Ceea ce s-a realizat prin aceste definiţii este mai degrabă o „reconstrucţie logică” a conceptelor aritmeticii, în sensul că, dacă definiţiile sunt acceptate, toate aceste afirmaţii din ştiinţă şi din vorbirea curentă, care implică termeni aritmetici, pot fi interpretate coerent şi sistematic astfel încât să fie apte de o validare obiectivă. Afirmaţia despre cele două persoane din birou realizează o ilustrare foarte simplă a ceea ce este consemnat aici.

riguroasă ideea că clasa numerelor naturale constă din numărul 0, succesorul lui, succesorul succesorului lui şi aşa mai departe.

Dacă definiţiile descrise aici sunt corect notate – acesta este unul dintre cazurile în care procedeele logicii simbolice sau matematice se dovedesc indispesabile –, se va vedea că definiensul oricăreia dintre ele conţine exclusiv termeni din domeniul logicii pure. În fapt, este posibil a da interpretările obişnuite termenilor primi ai lui Peano, şi prin aceasta sensul obişnuit al oricărui concept definit cu ajutorul lor – ceea ce include orice concept al matematicii – în termenii următoarelor 7 expresii: *nu*, *şi*, *dacă – atunci*, *pentru orice obiect x* astfel că..., *există un obiect x* astfel că..., *x este un element al clasei C*, *clasa tuturor lucrurilor x* astfel că... (acestea se adaugă variabilelor „*x*” şi „*C*”). Şi este posibil a reduce numărul conceptelor logice presupuse la doar patru: primele trei concepte menţionate sunt definibile în termenii lui „*nici – nici*”, iar al cincilea este definibil prin al patrulea şi prin „*nici – nici*”, astfel că, toate conceptele matematicii se dovedesc definibile în termenii a doar patru concepte ale logicii pure. (Definiţia unora dintre cele mai complexe concepte ale matematicii în termenii celor patru termeni primi menţionaţi ar putea umple foarte bine sute sau chiar mii de pagini; însă este clar că aceasta nu afectează în niciun fel importanţa teoretică a rezultatului obţinut; ea arată, totuşi, marele avantaj şi indispensabilitatea practică pentru matematică de-a avea disponibil un sistem larg de concepte de mare complexitate.)

9. Adevărul postulatelor lui Peano în interpretarea lor obişnuită

Se poate spune că definiţiile descrise în secţiunea precedentă redau precis şi explicit sensul conceptelor aritmetice. Mai mult – şi acesta este punctul crucial al problemei validităţii în matematică – se poate arăta că toate postulatele lui Peano devin propoziţii adevărate dacă termenii primi sunt construiţi în acord cu definiţiile considerate.

Astfel, P1 (0 este număr) este adevărată pentru că mulţimea tuturor numerelor – a numerelor naturale, se înţelege – a fost definită ca fiind formată din 0 şi din toţi succesorii lui. Adevărul lui P2 (succesorul oricărui număr este tot un număr) urmează din aceeaşi definiţie. Aceasta este adevărată, de asemenea, şi pentru P5, principiul inducţiei matematice. Pentru a demonstra totuşi aceasta, va trebui să recurgem mai curând la definiţia precisă a ideii de „întreg” decât la descrierea ei liberă dată mai sus. P4 (0 nu este succesorul niciunui număr) este înţeleasă ca adevărată în modul următor: în virtutea definiţiei lui „succesor”, un număr care este succesorul unui număr oarecare se poate aplica doar claselor cu cel puţin un element; însă numărul 0, prin definiţie, se aplică unei clase dacă şi numai dacă această clasă este vidă.

În timp ce adevărurile postulatelor P1, P2, P4 şi P5 pot fi simplu inferate din definiţiile de mai sus, cu ajutorul principiilor logicii, demonstraţia lui P3 (două numere nu pot avea acelaşi succesor) prezintă o anumită dificultate. Cum a fost menţionat în secţiunea precedentă, definiţia succesorului unui număr *n* se bazează pe operaţia adunării la o clasă de *n* elemente a unui nou element, neconţinut de acea clasă. Acum, dacă ar trebui să existe, în total, doar un număr finit de lucruri, atunci operaţia adunării nu ar putea fi continuată indefinit, iar P3, care (împreună cu P1 şi P2) implică faptul că întregii formează o mulţime infinită, ar fi falsă. Modalitatea lui Russell de-a înfrunta această dificultate a fost să introducă o axiomă specială „a infinitului" care stipulează efectiv existenţa unei infinităţi de obiecte şi care o face astfel pe P3 demonstrabilă (cf. Russell 1919: 24 şi cap. 13). Axioma infinitului nu aparţine legilor general recunoscute ale logicii, deşi ea este aptă unei exprimări în termeni pur logici şi poate fi tratată ca un postulat adiţional logicii.

10. Matematica – o ramură a logicii

Aşa cum am spus la început, toate teoremele aritmeticii, algebrei şi analizei pot fi deduse din postulatele lui Peano şi din definiţiilor acelor termeni matematici care nu sunt termeni primi în sistemul lui Peano. Această deducţie necesită doar principiile logicii, plus, în anumite cazuri, axioma alegerii, care asertează că pentru orice mulţime de mulţimi disjuncte, α, β, ... , există cel puţin o mulţime ce conţine exact un element din fiecare şi nu conţine niciun alt element[11]. Combinând acest rezultat cu ceea ce a fost spus mai sus despre sistemul lui Peano, se obţine următoarea concluzie, cunoscută de asemenea şi ca *teza logicismului cu privire la natura matematicii*:

Matematica este o ramură a logicii. Ea poate fi derivată din logică în următorul sens:

a. Toate conceptele matematicii, acestea însemnând conceptele aritmeticii, algebrei şi analizei, pot fi definite în termenii celor patru concepte ale logicii pure.

b. Toate teoremele matematicii pot fi deduse din acele definiţii cu ajutorul principiilor logicii (incluzând aici şi axioma infinitului şi a alegerii)[12].

În acest sens se poate spune că propoziţiile sistemului matematicii, aşa cum au fost ele delimitate aici, sunt adevărate în virtutea definiţiilor conceptelor matematice implicate sau că ele fac explicite anumite caracteristici cu care noi am dotat conceptele matematice prin intermediul definiţiilor. Propoziţiile matematicii au deci aceeaşi certitudine indiscutabilă, tipică unor propoziţii ca „Toţi burlacii sunt necăsătoriţi", însă aceeaşi lipsă totală de conţinut empiric este asociată acestei certitudini: propoziţiile matematicii sunt golite de orice conţinut empiric; ele nu transmit nicio informaţie cu privire la vreun subiect empiric oarecare.

[11] Acest postulat, care este doar aparent autoevident, este folosit în demonstrarea anumitor teoreme ale teoriei mulţimilor şi analizei numerelor reale şi complexe; pentru o discuţie a semnificaţiei şi a aspectelor ei problematice, vezi Russell 1919: cap. 12 (unde este numită axioma multiplicităţii) şi Fraenkel 1919 (Dover): §16, secţiunea 7 şi 8.

[12] Principiile logice dezvoltate în lucrarea lui Quine şi în alte sisteme moderne de logică formală similare impun anumite restricţii prin comparaţie cu acele reguli logice general acceptate până la începutul sec. XX. Descoperirea, totodată, a celebrelor paradoxuri logice, în special a celui datorat lui Russell (cf. Russell 1919: cap. 13), relevă faptul că principiile logice implicate în raţionamentele matematice obişnuite duc la contradicţii şi deci trebuie într-un fel sau altul restrânse.

11. Despre aplicabilitatea matematicii problemelor cu caracter empiric

Acest rezultat pare ireconciliabil cu faptul că, la urma urmelor, matematica s-a dovedit aplicabilă în cel mai înald grad problemelor cu caracter empiric şi că o bună parte din cunoaşterea ştiinţifică actuală a fost realizată prin continua utilizare şi aplicare a propoziţiilor matematice. – Să încercăm să clarificăm acest aparent paradox prin referirea la câteva exemple.

Să presupunem că avem de examinat o anumită cantitate de gaz, al cărui volum v, la o temperatură dată, este de 9 metri cubi, când presiunea p este de 4 atmosfere. Şi să mai presupunem că volumul gazului, pentru aceeaşi temperatură, dar presiunea de $p = 6$ at., este predicţionată prin legea lui Boyle. Folosindu-ne de aritmetica elementară, raţionăm după cum urmează: pentru valorile corespunzătoare ale lui v şi p, $vp = c$, însă $v = 9$ când $p = 4$, deci $c = 36$; prin urmare, dacă $p = 6$, atunci $v = 6$. Să mai presupunem că această predicţie este confirmată printr-un test. Arată acest lucru că aritmetica folosită are o putere predictivă prin ea însăşi, că propoziţiile ei au implicaţii factuale? Categoric nu. Toată puterea predictivă desfăşurată aici, şi întregul conţinut empiric expus, provine din datele iniţiale şi din legea lui Boyle, care asertează că $vp = c$ pentru orice valori corespunzătoare ale lui v şi p, prin urmare şi pentru $v = 9$, $p = 4$, şi implicit pentru $p = 6$ şi pentru valoarea corespunzătoarea a lui v[13]. Funcţia matematicii implicată aici nu este una predictivă ca atare; ea este mai curând analitică sau explicativă, întrucât face explicite diferitele asumări sau aserţiuni incluse în conţinutul premiselor argumentului (în cazul de faţă, acestea constau din legea lui Boyle şi din datele aferente); raţionamentul matematic arată că acele premise conţin – ascunsă în ele, ca să spunem aşa – o aserţiune despre cazul încă neobservat. Prin acceptarea premiselor noastre, aşa cum ne relevă aritmetica, noi am acceptat deja – fie că ştim acest lucru, fie că nu îl ştim – faptul că valoarea discutată a lui p este 6. Raţionamentul matematic, la fel ca cel logic, este un mecanism conceptual de explicitare a ceea ce este conţinut implicit în mulţimea premiselor. Concluzia la care conduce acest mecanism nu asertează nimic *teoretic nou*, în sensul de a nu fi conţinut în premise. Însă rezultatul obţinut poate fi foarte bine *psihologic nou*: poate noi să nu fi fost conştienţi, înaintea folosirii tehnicilor logicii şi matematicii, la ce ne-am angajat prin acceptarea unei mulţimi anume de asumări sau aserţiuni.

O analiză similară este posibilă în toate cazurile de matematică aplicată, incluzând aici şi pe acelea care presupun, să zicem, calcule. Să considerăm, de exemplu, ipoteza că un anumit corp, mişcându-se într-un câmp electric determinat, primeşte o acceleraţie constantă de 5 m/sec^2. În scopul testării ipotezei putem deriva din ea, prin două integrări succesive, faptul că, dacă obiectul a fost în repaus la începutul mişcării, distanţa parcursă de el în orice moment t este de $(5/2)t^2$ metri. Această concluzie poate fi în mod clar psihologic nouă pentru o persoană străină de subiect, însă ea nu este şi teoretic nouă; conţinutul concluziei este deja cuprins în

[13] Putem spune „prin urmare” în virtutea regulii substituţiei, care este una dintre regulile logice de inferenţă.

cel al ipotezei privind constanța accelerației. Şi într-adevăr, aici, ca şi în cazul presiunii gazului, un eşec al predicției ar fi considerat răspunzător pentru incorectitudinea factuală a cel puțin uneia dintre premisele implicate (de ex.: legea lui Boyle cu aplicare la gazul particular), însă niciodată ca semn al faptului că principiile logice şi matematice implicate ar putea fi nevalabile.

Astfel, în determinarea cunoaşterii empirice, matematica (la fel ca logica) este asemenea unui storcător teorectic, ca să spun aşa: mecanismele teoriilor matematice şi logice nu pot produce mai mult suc al informației factuale decât este conținut în asumțiile la care sunt aplicate; însă ele pot da mai mult suc de acest fel decât s-ar fi putut estima la o primă inspectare intuitivă a respectivelor asumții, care formează materia primă pentru storcător.

În acest punct este poate nimerit a considera, pe scurt, statutul acelor discipline matematice care nu sunt produsele aritmeticii, şi astfel ale logicii; ele includ, în particular, topologia, geometria, diferitele ramuri ale algebrei abstracte, cum ar fi teoria grupurilor, laticelor, corpurilor etc. Fiecare dintre aceste discipline poate fi dezvoltată ca un sistem deductiv pur, pe baza unei mulțimi corespunzătoare de postulate. Dacă *P* este conjuncția postulatelor unei teorii date, atunci demonstrația unei propoziții *T* în această teorie constă în deducerea lui *T* din *P* cu ajutorul principiilor logicii formale. Ceea ce este stabilit prin demonstrație nu este deci adevărul lui *T*, ci mai degrabă faptul că *T* este adevărat cu condiția ca postulatele teoriei să fie adevărate. Însă pentru că atât *P*, cât şi *T* conțin anumiți termeni primi ai teoriei, cărora nu le este asociat niciun sens specific, nu este posibil a vorbi strict de adevărul lui *P* sau *T*; ideea este mai adecvat exprimată astfel: dacă propoziția *T* este logic dedusă din *P*, atunci orice interpretare specifică a termenilor primi care transformă postulatele *P* în enunțuri adevărate vor face din *T*, de asemenea, un enunț adevărat. – Până aici analiza este întru totul analoagă aritmeticii bazate pe postulatele lui Peano. În cazul aritmeticii, totuşi, s-a putut face un pas mai departe, şi anume, să se definească sensurile obişnuite ale termenilor primi prin concepte pur logice şi să se arate că postulatele aritmeticii – şi deci teoremele – sunt necondiționat adevărate în virtutea acelor definiții. O procedură analoagă nu este posibilă acelor discipline care nu sunt produsele aritmeticii: termenii primi din diferitele ramuri ale algebrei abstracte nu au niciun „sens obişnuit"; şi dacă geometria, în interpretarea ei obişnuită, este gândită ca o teorie a structurii spațiului fizic, termenii ei primi au fost construiți cu referire la anumite tipuri de entități fizice, astfel că problema adevărului unei teorii geometrice, în această interpretare, se transformă într-o problemă *empirică*[14]. În scopul aplicării oricăror discipline nonaritmetice de acest fel unor domenii particulare ale matematicii, sau unor ştiințe empirice, este deci necesar a asigura mai întâi termenilor primi anumite sensuri specifice şi a vedea apoi dacă în această interpretare postulatele devin enunțuri adevărate. Dacă acesta este cazul, putem fi siguri că toate teoremele sunt enunțuri, de asemenea adevărate, pentru că sunt logic derivate din postulate şi

[14] Pentru o discuție mai detaliată în această problemă, cf. Hempel 1945.

explică astfel, în mod simplu, conținutul celor din urmă pentru interpretarea dată. În aplicarea lor, datele empirice, aceste teorii matematice, nu mai puțin decât teoriile provenite din aritmetică, şi finalmente din logică, au funcția unui instrument analitic ce pune în lumină implicațiile unei mulțimi date de asumții, fără a adăuga nimic la conținutul lor.

Însă, dacă matematica nu contribuie cu nimic la conținutul cunoaşterii noastre empirice, ea este de-a dreptul indispensabilă unei astfel de cunoaşteri ca mijloc de validare şi exprimare lingvistică: majoritatea teoriilor din ştiința empirică – incluzând aici şi pe cele care dau cele mai reuşite predicții sau aplicații practice – sunt realizate cu ajutorul conceptelor matematice; formularea acelor teorii presupune, în particular, sistemul de numere, precum şi relațiile funcționale dintre diferitele variabile metrice. În plus, testarea ştiințifică a acestor teorii, formularea predicțiilor cu ajutorul lor, în fine, aplicarea lor practică, toate necesită deducția de la teoria generală la anumite consecințe specifice; iar aceste deducții ar fi de-a dreptul imposibile fără mecanismul matematic prin care se arată ce asertează teoria generală despre un anumit caz special.

Aşadar, analiza schițată în aceste pagini prezintă sistemul matematicii ca pe o vastă şi ingenioasă structură conceptuală, fără conținut empiric, doar ca un indispensabil şi puternic instrument teoretic destinat înțelegerii ştiințifice şi gestionării lumii experiențelor noastre.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE

Birkhoff, G., and MacLane, S., *A Survey of Modern Algebra*, New Yuok: Macmillan, 1941.

Carnap, R., *Foundations of Logic and Mathematics. International Enciclopedia of Unified Science*, vol. 1. Chicago: University of Chicago Press, 1939.

Fraenkel, A.A., *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin: Springer; 2nd ed., 1923; 3nd ed., 1928 (reprinted, New York; Dover, 1946).

Hempel C., „Geometry and Empirical Science”, în *American Mathematical Monthly*, vol. 52, 1945, pp. 7–17.

Quine, W.V., *Mathematical Logic*, New York: Norton, 1940 (rev. Ed. Cambridge: Harvard University Press, 1951; reprinted New York: Harper Torchbooks, 1962).

Russell, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, Allen and Unwin; New York: Macmillan, 1919; 2nd ed., Allen and Unwin, 1920.

Tarski, A., *Introduction to Logic and Methodology of Deductive Sciences*, New York, Oxford University Press, 1941.

Whitehead, A.N., and Russell, B., *Principia Mathematica*, 3 vol., Cambridge University Press, 1910–13; 2nd ed. 1925–27.

Young, J.W., *Lectures on the Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, NeYork: Macmillan, 1911.

***Traducere din limba engleză de* Iancu Lucica**

Notă: Traducere după Carl G. Hempel, “On The Nature of Mathematical Truth”, în *The American Mathematical Monthly*, vol. 52 (1945), p. 543–556.