LOGICĂ ŞI EPISTEMOLOGIE

PARADOXUL CA EROARE LOGICĂ

IANCU LUCICA
Universitatea de Vest, Timişoara

Paradox as a logical error. My study is an approach of the paradoxes in the context of general theory of logical errors. I have set out to show: 1) if the paradoxes can be attributed to a particular error, or to a category of logical errrors, and 2) if paradoxes can join paralogisms, sophisms and apporias into a unitary approach. At the same time, I have attempted an analysis of Aristotle's paradox concept in direct comparison with modern paradoxes. Remarcable for Aristotle's paradox analysis is the role of the question. On account of paradoxical interogation, and because of it, I have introduced the distinction between the active and pasive contradiction. As I have tried to show, paradoxes, in the modern sense of the term, are passive contradictions, needing to be activated through questioning. In the final part, I have discussed the limits of the paralogistic conception regarding paradoxes.

Key words: paradox, contradiction, sophism, paralogism, apporia, logic consistency and inconsistency, paradoxical interrogation.

§1

Lucrarea de faţă este o abordare a paradoxurilor din perspectiva teoriei generale a erorilor logice. Voi încerca să arăt: 1) dacă paradoxurile pot fi puse în sarcina unor erori din categoria celor cunoscute şi 2) dacă problema paradoxurilor poate fi corelată cu problema sofismelor, a paralogismelor şi a aporiilor într-o abordare unitară a acestora.

Manualele de logică, atât cele vechi, cât şi cele noi, conţin un capitol special dedicat erorilor, însă nici unele, nici celelalte nu înregistrează paradoxul ca pe o eroare, tema paradoxurilor se discută aici, dacă se discută, în cu totul alţi termeni. Pe de altă parte, atitudinea generată de fenomenul paradoxurilor a fost, încă de la apariţia lor, în Antichitate, una de respingere, şi atunci revin la vechea întrebare: ce motivează o atare respingere dacă nu un anume gen de eroare logică?

Legat de chestiunile invocate vreau să pun în discuţie câteva dintre ideile lui Aristotel pe tema paradoxurilor. După ştiinţa mea, este primul autor care tratează paradoxul în contextul erorilor logice, deşi aici ne lovim de o altă dificultate: sunt paradoxurile lui Aristotel comparabile cu paradoxurile modernilor? Sau de acelaşi tip cu ele? Iar dacă nu sunt, mai putem noi vorbi de o *concepţie aristotelică* în materie de paradoxuri?

Rev. filos., **LXIII**, *3*, p. 297–330, Bucureşti, 2016

§2

Temele anunțate presupun o bună cunoaştere a termenilor, a termenului *paradox*, pe de o parte, şi a termenului *eroare*, pe de alta, însă „buna cunoaştere” a termenilor înseamnă implicit definiția lor, ceea ce în cazul de față este mai greu de realizat date fiind resemnificările pe care le-au suferit cei doi termeni în ultimul timp. Regula adecvării din teoria definiției cere însă ca dinamica definițiilor să se regăsească în dinamica de ansamblu a termenilor, altfel definițiile riscă să îşi piardă utilitatea.

În privința paradoxului avem de examinat două definiții mai importante. Prima este definiția clasică potrivit căreia paradoxul este contradicția dintre două propoziții *A* şi *B*, una este negația celeilalte, astfel că din supoziția lui *A* rezultă *B* şi din supoziția lui *B* rezultă *A*. Definiția se regăseşte în mai toate tratatele de logică matematică în care se discută tema paradoxurilor. Elliot Mendelson, de exemplu, în ediția a patra a cărții sale *Introduction to Mathematical Logic* (2001) spune că paradoxurile sunt „argumente ce duc la contradicții” şi dă opt exemple de paradoxuri pe care le expune fără comentarii:

Paradoxul lui Russell,	Paradoxul lui Richard,
Paradoxul lui Cantor,	Paradoxul lui Berry,
Paradoxul lui Burali-Forti,	Paradoxul lui Grelling
Paradoxul mincinosului,	Paradoxul lui Löb[1].

Delimitarea paradoxului la Mendelson s-a făcut în intensiune (prin definiție) şi în extensiune (prin enumerare), aşa încât problema s-ar putea considera rezolvată dacă nu am fi nevoiți să luăm în considerare şi cea de-a doua definiție. Introdusă prin cartea lui R.M. Sainsbury, *Paradoxes* (1981), definiția admite drept paradox „orice concluzie inacceptabilă derivată prin raționamente aparent acceptabile din premise aparent acceptabile”[2].

Termenii „acceptabil” şi „inacceptabil” sunt luați de Sainsbury în înțelesul lor uzual, după cum tot în înțelesul lor uzual apar ei şi la ceilalți autori, care şi-au însuşit definiția, de aici unele semne de întrebare asupra cărora poate că s-ar cuveni insistat. Cert este că în accepțiunea lui Sainsbury, extensiunea termenului paradox trece mult dincolo de enumerarea lui Mendelson. La fel în cartea lui Nicholas Rescher, *Paradoxes. Their Roots, Range, and Resolution* (2001), unde autorul dezvoltă o concepție asupra paradoxurilor pornind de la o definiție similară – „se ajunge la paradox când o mulțime de propoziții individual plauzibile (sau *accepatbile* – a.n.) sunt colectiv inconsistente”.[3] Rescher enumeră nu mai puțin de o sută patruzeci şi

[1] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 1.
[2] R.M. Sainsbury, *Paradoxes* (second edition), p. 3.
[3] N. Rescher, *Paradoxes. Their Roots, Range and Resolution*, p. 7.

şase de paradoxuri, aproape de douăzeci de ori mai multe decât în lista lui Mendelson, în care include antinomiile lui Kant, aporiile lui Zenon, unele argumente cunoscute astăzi sub numele de „dileme” (dilema prizonierilor, dilema crocodilului ş.a.), o serie de argumente sofistice, plus alte raţionamente din ştiinţă şi din filosofie asupra cărora nu doresc să insist. Voi ridica, în schimb, o altă întrebare: când punem problema subsumării paradoxurilor ideii de eroare logică, la care paradoxuri ne referim? Ce paradoxuri avem în vedere prin această subsumare?

Dată fiind ambiguitatea termenului „paradox”, am propus într-un studiu recent să operăm cu două sensuri ale termenului – un sens restrâns, acesta însemnând paradoxul definiţiei clasice, şi un sens larg, circumscris definiţiei lui Sainsbury (în sens restrâns, paradoxul este o contradicţie explicită, iar în sens larg, una implicită)[4].

Dacă ne punem de acord asupra acestei chestiuni, răspunsul meu la întrebare este fără echivoc: asimilarea paradoxului ideii de eroare logică vizează paradoxul primei accepţiuni. Presupunând că vom reuşi să arătăm că paradoxurile primei definiţii sunt erori logice de un fel anume, cu atât mai uşor ne va fi să arătăm acest lucru şi pentru paradoxurile celei de-a doua definiţii.

§3

Niciunul dintre paradoxurile clasice nu are o singură formulare, fiecare paradox se asociază unei clase de formulări echivalente. O voi numi *clasa de echivalenţă* a paradoxului. Că nu întotdeauna soluţia unui paradox este şi soluţia clasei lui de echivalenţă este, iarăşi, foarte adevărat, şi atunci în loc de *clasa de echivalenţă* a unui paradox este preferabil să vorbim de clasa lui *de asemănare*. Este clasa tuturor paradoxurilor înrudite ca formă (sau asemănătoare) paradoxului dat.

Relativ la fiecare clasă de asemănare, se cere să identificăm forma (sau formularea) standard a paradoxului, acea formă la care sunt raportate apoi toate celelalte versiuni ale lui. Dacă p este forma standard a unui paradox oarecare şi Cp clasa lui de asemănare, şi dacă $q \in Cp$, atunci $q \approx p$, unde cu „$\approx$” am notat relaţia de asemănare a paradoxurilor. Nu este o relaţie precisă, cum ar fi relaţia de echivalenţă din logică, de exemplu, ci una imprecisă (în sensul logicii fuzzy), ceea ce înseamnă că putem vorbi despre unele paradoxuri ca despre paradoxuri *mai mult sau mai puţin asemănătoare*, *mai mult sau mai puţin înrudite*. Numesc „paradoxuri de trecere” paradoxurile care fac legătura dintre două sau mai multe clase de asemănare. De interes deocamdată sunt formele (sau formulările) standard ale paradoxurilor, asupra cărora mă voi opri foarte pe scurt în cele ce urmează.

[4] I. Lucica, *Paradoxurile şi metoda raţionamentului diagonal*, p. 7.

1) PARADOXUL MINCINOSULUI ŞI PARADOXURI DE TIP MINCINOSUL

Cel mai vechi paradox şi totodată cel mai bogat în consecinţe este paradoxul mincinosului. Cunoscut din Antichitate, paradoxul a primit de-a lungul timpului numeroase reformulări (numai la Buridan sunt peste 18 variante, ca să nu mai vorbim de variantele lui moderne). Varianta originală a paradoxului îl invocă pe cretanul Epimenide[5], acesta spune că toţi cretanii sunt mincinoşi. Se pune apoi întrebarea ce spune Epimenide, adevărul sau minciuna? Un raţionament simplu ne va arăta că dacă Epimenide spune adevărul, el minte, iar dacă minte, spune adevărul. Prin urmare, orice răspuns am da întrebării intrăm în contradicţie.

Acelaşi paradox se obţine înlocuindu-l pe „mincinos" cu „fals" (despre motivele înlocuirii lui voi vorbi cu altă ocazie). O reformulare foarte simplă a paradoxului va fi atunci următoarea:

(*i*) Propoziţia scrisă în dreptul lui (*i*) este falsă.

Şi de această dată propoziţia este adevărată şi falsă în acelaşi timp (dacă este adevărată, ea este falsă, şi dacă este falsă, ea este adevărată). Însă paradoxul are şi formulări mai complicate, cu toate că, riguros vorbind, contradicţia este aceeaşi. Să examinăm sub aspectul valorii de adevăr propoziţia:

(*ii*) $2 + 2 = 4$ şi această conjuncţie este falsă.

Facem cuvenitele presupuneri. Fiind vorba de o conjuncţie, dacă o presupunem adevărată, fiecare termen al ei va fi adevărat; deci va fi adevărat şi cel de-al doilea termen. Acesta spune despre conjuncţie că este falsă (implicarea falsului prin adevăr). Iar dacă este falsă, conform transcrierilor de Morgan este fals sau primul său termen, sau al doilea. Cum primul său termen este un adevăr matematic cunoscut, nu poate fi fals decât al doilea, care spune despre conjuncţie că este falsă. Prin urmare, este fals că *această conjuncţie este falsă*, deci *această conjuncţie este adevărată* (implicarea adevărului prin fals).

În opinia lui Roy T. Cook, paradoxul mincinosului, ca toate celelalte paradoxuri, de altfel, se sprijină pe trei mari supoziţii (sau presupoziţii)[6]. Prima supoziţie este dată de principiul noncontradicţiei, a doua de principiul terţului exclus, iar cea de-a treia de schema (T) din definiţia tarskiană a adevărului. Le reamintesc fără a intra în detalii:

(1) Nici o propoziţie nu poate fi adevărată şi falsă în acelaşi timp.

[5] Paradoxul mincinosului a cunoscut în Antichitate două formulări – formularea lui Epimenide, invocată mai sus, şi formularea lui Eubulide: „Propoziţia pe care o spun acum este o minciună" (cf. cu St. C. Kleene, *Mathematical Logic*, p. 188).

[6] Cf. cu Roy T. Cook, *Paradoxes*, p. 31 şi urm.

(2) O propoziție este sau adevărată sau falsă, exclus a treia posibilitate,

(3) X este propoziție adevărată dacă şi numai dacă p (unde X este numele, în metalimbaj, al propoziției p).

Repet, este vorba de supozițiile paradoxului şi nu de premisele lui, care înseamnă altceva. În conformitate cu (2), de exemplu, propoziția (i) trebuie să fie adevărată sau falsă. Dacă luăm ca premisă adevărul propoziției, atunci propoziția este adevărată şi falsă în acelaşi timp, iar dacă luăm ca premisă falsul ei, atunci propoziția este falsă şi adevărată în acelaşi timp. În ambele variante se încalcă supoziția (1).

Aşa cum am spus, cea de-a treia supoziție este schema sau convenția (T) din definiția adevărului la Tarski. Prin această schemă predicatul „adevărat", de la nivelul metalimbajului, poate fi asociat propozițiilor adevărate din limbajul obiect. Aplicată paradoxului mincinosului, în varianta (*i*), schema (3) va da:

(*i*') (i) este propoziție adevărată dacă şi numai dacă propoziția scrisă în dreptul lui (*i*) este falsă.

După cum se poate observa, (*i*) figurează nu doar ca nume, ci şi ca parte a propoziției pe care o numeşte, ceea ce duce la contradicție (propoziția este adevărată dacă este falsă, şi invers). De aici câteva consecințe: *a*) în construcțiile de tip mincinosul se încalcă distincția limbaj obiect-metalimbaj, *b*) dacă L este un limbaj natural oarecare, predicatul *adevărat-în*-L aparține limbajului despre L, adică metalimbajului, şi nu limbajului L ca atare, *c*) nici un limbaj nu dispune de un concept propriu de adevăr (în terminologia lui Tarski, nici un limbaj din ierarhia limbaj obiect-metalimbaj nu este semantic închis).

2) PARADOXUL LUI RUSSELL

Dintre paradoxurile moderne, de referință este paradoxul lui Russell. Acesta poate fi formulat în extensiune, ca şi în intensiune. Formularea în extensiune presupune noțiunea de clasă a tuturor claselor care nu se conțin pe sine. Se pune întrebarea dacă respectiva clasă se conține sau nu pe sine (din supoziția că se conține rezultă că nu se conține, şi invers).

Varianta în intensiune a paradoxului presupune predicatele *Pd* şi *Imp*, adică *predicabil* şi *impredicabil*. Un predicat este predicabil dacă se predică despre sine (*scurt*, *substantiv*, *cuvânt* etc.) şi este impredicabil dacă nu se predică (*triunghi*, *roşu*, *ascuțit* etc.).

Aceeaşi întrebare: impredicabil este predicabil sau impredicabil? Şi acelaşi răspuns: dacă impredicabil este predicabil, el este impredicabil şi dacă este impredicabil, el este predicabil.

Înrudit cu forma în intensiune a paradoxului lui Russell este paradoxul lui Grelling (sau Nelson-Grelling, după numele celor doi matematicieni care l-au descoperit). În literatură se spune „înrudit” şi „asemănător”, eu cred însă că este vorba tot de paradoxul lui Russell, mai exact, de un caz particular al acestuia.

Selectăm din mulţimea predicatelor la care se referă paradoxul lui Russell doar acele predicate exprimate prin adjective şi împărţim aceste adjective în două categorii – autologice şi heterologice. Este autologic adjectivul care se aplică lui însuşi şi este heterologic adjectivul care nu se aplică. Adjectivul *românesc*, de pildă, se aplică inclusiv lui *românesc*, deci este autologic, spre deosebire de *ascuţit* sau *triunghiular* care nu se aplică, ele sunt heterologice (nu putem spune despre adjectivul *ascuţit* că ar fi el însuşi ascuţit).

Cum este atunci adjectivul *heterologic*, autologic sau heterologic? Un raţionament similar ne arată că dacă *heterologic* este apreciat ca autologic, atunci el este heterologic, şi invers, din heterologic devine autologic.

De ce este paradoxul lui Grelling un caz particular al paradoxului lui Russell?

Întâi, pentru că şi adjectivele sunt predicate, deci li se poate aplica şi lor distincţia *predicabil-impredicabil*. Al doilea, pentru că şi adjectivele *autologic/ heterologic* răspund întrebării din paradoxul lui Russell. În loc să ne întrebăm dacă *heterologic* este autologic sau heterologic, ne putem întreba dacă *heterologic* este predicabil sau impredicabil.

Să presupunem că *heterologic* ar fi predicabil. Urmează că *heterologic* se predică despre sine, deci *heterologic* este heterologic. Şi invers: *heterologic* este impredicabil, deci el nu se predică despre sine, deci *heterologic* este *heterologic*, deci este autologic.

Dar, dacă paradoxul lui Grelling funcţionează în termenii paradoxului lui Russell, nu cumva şi paradoxul lui Russell funcţionează în termenii paradoxului lui Gelling? Întrebarea, în acest caz, ar fi dacă adjectivul *impredicabil* este autologic sau heterologic? Dacă da, atunci paradoxul lui Russell şi paradoxul lui Grelling sunt echivalente relativ la clasa de predicate avută în vedere (las cititorului ca exerciţiu continuarea raţionamentului).

3) PARADOXURILE CONCEPTULUI DE MULŢIME

Odată cu apariţia teoriei mulţimilor au apărut şi paradoxurile conceptului de mulţime. Există în momentul de faţă mai multe asemenea paradoxuri – paradoxul lui Cantor, paradoxul lui Burali-Forti, paradoxul lui Mirimanoff ş.a. – care atestă unul şi acelaşi lucru: inconsistenţa (contradicţia) teoriei mulţimilor. Paradoxul lui Cantor (1897), al doilea în ordine istorică după paradoxul lui Burali-Forti (1892), este preferabil acestuia din cauza simplităţii lui.

Paradoxul angajează noţiunile mulţimiste de *număr cardinal* şi *mulţime potenţială*, precum şi două din teoremele teoriei mulţimilor, însă acelaşi paradox poate fi redat prin simpla analiză logică a termenilor[7].

[7] Analiza este inspirată după Gh. Enescu, *Paradoxurile logicii matematice*, în Gh. Enescu, *Paradoxuri*, *Sofisme*, *Aporii*, p. 123.

Fie A, B, C, ... mulțimi. Unele dintre aceste mulțimi sunt mai cuprinzătoare, altele mai puțin cuprinzătoare. Mulțimea $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, de exemplu, este mai puțin cuprinzătoare decât mulțimea $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; la fel mulțimea $\{\varnothing, 0, a, 2, \{5\}\}$ față de mulțimea $\{\varnothing, 0, a, 2, \{5\}, \{c, 8\}\}$. În general, când are loc relația $X \in Y$ între două mulțimi X și Y, spunem despre X că este mai restrânsă sau mai puțin cuprinzătoare decât Y; sau invers, că Y este mai extinsă sau mai cuprinzătoare decât X.

Introducem acum noțiunea de mulțime universală (sau totală), cea mai cuprinzătoare dintre mulțimi, pe care o notăm cu U. Condiția $x \in U$, fiind definitorie pentru noțiunea de mulțime, este valabilă și pentru U; deci $U \in U$. Însă aceasta este o contradicție întrucât presupune ca U să fie mai cuprinzătoare (sau mai puțin cuprinzătoare) decât ea însăși.

Contradicțiile mulțimii vide. Nici noțiunea de mulțime vidă nu este în afara oricărei discuții. Conform *Dicționarului Explicativ al Limbii Române* (ediția a II-a, 1998), cuvântul *mulțime* înseamnă „număr mare de ființe sau lucruri, cantitate mare”. La rândul lui, „vid” înseamnă „ceva care nu este ocupat, locuit; ceva pustiu”. Sintagma *mulțime vidă* s-ar traduce atunci prin „ceva ce se compune dintr-un mare număr de lucruri, dar nu se compune din nimic”, „ceva neocupat (pustiu) care conține un mare număr de lucruri”. O contradicție în termeni, cum se spune, însă conceptul matematic de mulțime nu corespunde întru totul conceptului informal. Dat fiind că există mulțimi mai mari și mai mici – a se înțelege mulțimi cu mai multe sau mai puține elemente – se introduce, prin idealizare, mulțimea cea mai mică și mulțimea cea mai mare. Prima este mulțimea fără nici un element (= mulțimea vidă $\varnothing$), iar a doua este mulțimea tuturor elementelor (= mulțimea univerasală U). Ambele sunt concepte contradictorii, dar nu la fel. La mulțimea vidă, contradicția apare doar în expresia conceptului, nu și în conținutul lui (dacă am înlocui-o cu o altă denumire, să zicem *mulțime inițială*, contradicția ar fi mai puțin vizibilă). La mulțimea totală lucrurile stau invers, aici contradicția apare în conținutul noțiunii, nu și în expresia ei.

Consecințele celor două concepte sunt greu de evitat. Unele contravin logicii raportului parte-întreg, altele contravin unor definiții și reguli de calcul de mult statornicite. De exemplu, aplicată mulțimii vide, axioma mulțimii potențiale dă mulțimea $\{\varnothing\}$, care înseamnă *mulțimea ce conține mulțimea care nu conține nimic*.

Această mulțime conține sau nu ceva?

Pentru simțul comun, cele două noțiuni aproape că se confundă, nu însă și în teoria matematică a mulțimilor unde $\varnothing$ și $\{\varnothing\}$ sunt lucruri diferite. Dacă prima nu conține nimic, cea de-a doua conține ceva, și anume, mulțimea care nu conține nimic. Relația de incluziune merge de la $\varnothing$ la $\{\varnothing\}$, nu și invers (dacă ar fi valabilă și incluziunea $\{\varnothing\} \subset \varnothing$, mulțimea $\varnothing$ nu ar mai fi vidă).

Relativ la definiția mulțimii potențiale, mulțimea universală U are alte particularități. Pe de o parte, ar trebui admisă relația $U \subset P(U)$, conform definiției mulțimii potențiale, iar pe de altă parte ar trebui admisă relația $P(U) \subset U$, conform definiției mulțimii totale. Deci U şi $P(U)$ coincid, sunt mulțimi identice. De unde rezultă că în cazul mulțimii totale partea se identifică cu întregul (în teoria mulțimilor sunt considerate finite doar mulțimile care nu pot fi puse în corespondență biunivocă cu părți ale lor).

Vom spune, în concluzie, că mulțimea universală este un concept formal contradictoriu, spre deosebire de mulțimea vidă care este doar material contradictorie. Niciuna dintre mulțimile $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ... nu duce la contradicții, toate sunt în perfect acord cu principiile teoriei (axiome, definiții, reguli etc.).

4) PARADOXUL LUI CURRY

Un paradox de trecere sau de legătură, în sensul celor deja discutate, este paradoxul lui Curry. Se înrudeşte cu paradoxul mincinosului, cu paradoxul lui Russell şi cu alte paradoxuri, inclusiv cu paradoxurile implicației materiale, fără a se reduce totuşi la vreunul dintre ele. Pentru că am prezentat acest paradox pe larg în două lucrări anterioare, mă rezum aici la strictul necesar. Menționez pentru început că din lema diagonalizării, cu aplicare la implicații, Curry obține relația

(α) $X \equiv X \supset q$

pe care o citim ca pe o implicație autoreferențială: *dacă această implicație este adevărată*, *atunci este adevărată şi o propoziție oarecare q*. Mai departe, procedăm ca în paradoxul mincinosului făcând deducții din supoziția de adevăr, respectiv fals, a propoziției. Astfel, dacă propoziția (α) este adevărată, antecedentul implicației este de asemenea adevărat, deci şi consecventul ar trebui să fie adevărat. Dar consecventul este o propoziție oarecare, de unde deducem că antecedentul, şi deci întreaga implicație, este o propoziție falsă. Iar dacă (α) este falsă, antecedentul implicației fiind fals, implicația este adevărată şi deci întreaga propoziție este adevărată.

Dat în această formă, paradoxul lui Curry este o combinație între paradoxul mincinosului şi paradoxurile implicației materiale, însă Curry nu discută caracterul paradoxal al schemei (α), el foloseşte această schemă în demonstrațiile de inconsistență ale unor sisteme logice. Astfel, din (α) şi din schemele de axiome:

I. $\vdash M \supset M$,
II. $\vdash M \supset . M \supset N . \rightarrow . \vdash M \supset N$,
III. $\vdash M \;\&\; \vdash M \supset N . \rightarrow . \vdash N$.

el deduce o propoziție oarecare q:

(1) $X \supset X$ [din I],
(2) $X \supset (X \supset q)$ [din (α)],

(3) $X \supset q$ [din 2, II şi III],
(4) X [din 3, (α) şi III],
(5) q [din 3, 4 şi III].

Curry demonstrează în felul acesta inconsistenţa unor teorii logice cum ar fi teoria semantică a adevărului (la Tarski), teoria intuitivă a mulţimilor, unele sisteme de logică combinatorică ş. a. Pentru teoria mulţimilor, de exemplu, demonstraţia are loc după cum urmează.

Fie un predicat oarecare F. Conform axiomei comprehensiunii, predicatul F determină o clasă $M = \{x: F(x)\}$, astfel că între $x \in M$ şi $F(x)$ are loc relaţia:

(C) $x \in M \equiv F(x)$

Mai departe, înlocuim în (C) pe F cu schema $x \in x \rightarrow q$ pentru a defini mulţimea:

(M) $M = \{x: x \in x \rightarrow q\}$.

din care, prin intermediul lui (C) obţinem:

(E) $(M \in M) \equiv (M \in M \rightarrow q)$.

Deducţia lui q din (C) şi (E) se face în aceeaşi manieră:

(1) $M \in M \rightarrow M \in M \rightarrow q$ [din (E)]
(2) $M \in M \rightarrow q$ [din (1)]
(3) $M \in M$ [din (2) şi din (E)]
(4) q [din (2) şi (3)]

A se observa că schema (E) nu este altceva decât schema (α) în care X a fost înlocuit cu $M \in M$. Prin urmare, teoria mulţimilor este inconsistentă în sensul lui Post (cititorul poate face unele analogii cu paradoxurile implicaţiei materiale şi cu paradoxul lui Russell plecând de la schema $x \in x \rightarrow q$ şi de la definiţia mulţimii M).

5) PARADOXURILE DEFINIBILITĂŢII FINITE

Prin procedeul diagonalelor, Cantor a demonstrat că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă, însă, din raţiuni uşor de înţeles, mulţimea numerelor reale finit definibile este numărabilă (un concept este finit definibil dacă în definiensul lui intră numai secvenţe finite de litere, termeni, simboluri etc.).

König a luat în considerare doar numerele reale care nu au o definibilitate finită şi a pus problema dacă şi această mulţime este numărabilă. El a procedat prin reducere la absurd. Presupunem mai întâi că mulţimea numerelor reale care nu dispun de o definiţie finită este numărabilă. În acest caz va exista un *prim număr ce nu poate fi definit printr-un număr finit de cuvinte*. Însă cuvintele subliniate formează o definiţie finită, iar acest fapt contrazice premisa că mulţimea se compune doar din numere care nu au definiţie finită. Prin urmare, ipoteza că mulţimea numerelor reale care nu dispun de o definiţie finită este numărabilă duce la contradicţii, ceea ce echivalează cu a spune că mulţimea nu este numărabilă.

Doi ani mai târziu, A.C. Dixon va observa că descripţia „cel mai mic număr ce nu poate fi definit în mai puţin de *n* cuvinte” duce şi ea la contradicţii când *n* este mai mare decât numărul de cuvinte din interiorul citării (în cazul de faţă, 15). În acelaşi an (1906), B. Russell publică paradoxul despre „cel mai mic număr întreg ce nu poate fi numit în mai puţin de douăzeci şi şapte de silabe” pe care i-l atribuie lui G.G. Berry.

Fie *n* acest număr. Contradicţia rezultă din faptul că, pe de o parte, *n* aparţine mulţimii numerelor ce nu pot fi numite în mai puţin de douăzeci şi şapte de silabe, iar pe de altă parte, numele său dintre ghilimele are douzeci şi şase de silabe.

Cel mai reprezentativ paradox al definibilităţii finite rămâne însă paradoxul lui Richard (1905). Şi de această dată punctul de plecare este dat de faptul că mulţimea numerelor reale finit definibile este numărabilă. Pentru simplificare, vom nota cu *R* mulţimea numerelor finit definibile din intervalul [0, 1] şi cu n_1, n_2, n_3, ... numerele acestei mulţimi scrise în formă zecimală. Fiecare număr din *R* îl va avea pe 0 ca parte întreagă, urmat de o dezvoltare zecimală infinită.

Relativ la *R* se poate construi un număr *r* care îl are pe 0 ca parte întreagă, dar care diferă de fiecare număr $n_i \in R$ prin zecimala cu numărul de ordine *i*. Dat fiind că *r* are o definiţie finită, el trebuie să facă parte din *R*, dar, conform definiţiei, el diferă de fiecare număr n_1, n_2, n_3, ... şi deci nu-i poate aparţine lui *R*.

§4

Ipoteza că paradoxurile s-ar datora unor erori de un tip anume – nu am argumentat încă această ipoteză – ne obligă la precizări similare şi în privinţa noţiunii de *eroare*. Din păcate, teoria erorilor logice nu este astăzi suficient de elaborată pentru a face lumină într-o problemă atât de controversată cum este problema paradoxurilor. În ciuda venerabilei tradiţii de care se bucură, problema erorilor a intrat destul de târziu în sfera de interes a noii logici şi nu este de mirare că cele mai importante concepte ale ei, inclusiv conceptul de eroare, sunt în urma multora dintre conceptele întâlnite astăzi în formulările paradoxurilor. Cel care a contribuit la relansarea teoriei a fost C.L. Hamblin, prin cartea sa *Fallacies* (1970), însă tot el va îngusta perspectiva abordării erorilor limitând discuția exclusiv la erorile de argumentare.

Termenul folosit de Hamblin pentru desemnarea erorilor este *fallacy*, din latinescul *fallācia-ae*, care înseamnă *înşelător*, *mincinos*, *fals*. „Argumentul falacios, spune el, aşa cum ne arată cele mai multe descrieri ale lui, începând cu Aristotel, este unul ce pare valid, dar nu este”[8].

Definiția lui Hamblin va fi preluată cu aceeaşi uşurință cu care a fost preluată definiția paradoxului la Sainsbury. Astfel, în cartea lui I.M. Copi şi C. Cohen, *Introduction to Logic* (ediția a 11-a, 2006), se dă o definiție asemănătoare până la identitate: „Definim falacia drept un tip de argument ce poate părea corect, dar care examinat se dovedeşte a nu fi”[9].

Am fi tentați să spunem că prin *fallacy* sunt desemnate exclusiv erorile de argumentare şi că pentru desemnarea celorlalte erori ar trebui folosiți termeni diferiți, totuşi, niciunul dintre autorii consultați nu procedează în acest fel, erorile studiate de ei sunt în exclusivitate erori de argumentare. De aici întrebarea dacă erorile nu sunt cumva şi ele reductibile, dacă nu le putem împărți în *erori prime*, ca să mă exprim astfel, acestea fiind erorile de argumentare, şi în *erori derivate*? Cu alte cuvinte, dacă operația *B* se reduce la operația *A*, sau nu se reduce, dar o implică pe *A*, atunci şi erorile lui *B* se reduc, respectiv implică, erorile lui *A*?

Personal, nu cred că trebuie mers atât de departe. Aşa cum înțeleg eu lucrurile, eroarea este un termen relativ – nu poți spune despre ceva că este eronat dacă nu ştii mai întâi forma corectă a acelui ceva. Şi nu poți spune despre ceva că este eronat în general, aşa cum nu poți spune despre ceva/cineva că este mare în general, la dreapta în general sau părinte în general, trebuie arătat de fiecare dată față de cine este acel ceva/cineva mare, la dreapta sau părinte.

În logică, şi nu numai în logică, corectitudinea provine din reguli – apreciem eroarea indicând regula prin încălcarea căreia se produce ea –, reguli ce pot fi explicite sau numai implicite (în utilizare). Şi într-un caz şi în celălalt pot interveni excepții, când una şi aceeaşi regulă, admisă într-o teorie, este respinsă într-o o altă teorie. Inferența prin reducere la absurd, de exemplu, este o regulă de raționare corectă în logica bivalentă, nu şi în logica intuiționistă. La fel celebrul silogism despre mortalitatea lui Socrate, admis de silogistica cu termeni singulari, dar respins de silogistica aristotelică; şi aşa mai departe, exemplele sunt foarte numeroase. De unde rezultă că termenul *eroare* este de două ori relativ; odată raportat la regula de utilizare, şi încă odată, raportat la teorie. Or, trebuie ținut cont de aceste relativizări ale lui dacă vrem să ajungem o înțelegere cât de cât satisfăcătoare a fenomenului.

Nu există în momentul de față o clasificare unanim acceptată a erorilor, aşa că voi proceda prin simplificare împărțind pentru început erorile în două categorii –

[8] C.L. Hamlin, *Fallacies*, p. 12.
[9] I.M. Copi, C. Cohen, *Introduction to Logic*, p. 137.

în erori preinferenţiale şi în erori inferenţiale. Erorile inferenţiale pot fi erori de argumentare şi erori de demonstrare, iar cele preinferenţiale pot fi: 1) erori de identificare, 2) erori de generalizare/determinare, 3) erori de clasificare/diviziune, 4) erori de cuantificare, 5) erori ale operaţiei de negare, 6) erori de definire.

Se înţelege că lista acestor erori preinferenţiale trebuie lăsată deschisă pentru că şi numărul operaţiilor preinferenţiale este mult mai mare (nu au fost menţionate erorile de interpretare, de exemplu, care pot fi citite în aceeaşi cheie).

Să revenim la erorile inferenţiale. Indiferent că sunt erori de argumentare sau de demonstrare, acestea pot fi împărţite mai departe în erori de deducţie şi erori de inducţie. Erorile deductive sunt formale sau informale, în timp ce erorile inductive sunt numai informale.

Erorile formale provin din încălcarea regulilor formale de validitate, cum ar fi regula împătririi termenilor din silogistică, în timp ce erorile informale (numite şi *materiale*) provin din conţinutul (materia) argumentelor. Acestea sunt nu doar mai numeroase, ci şi mai greu de depistat.

Inspiraţi de clasificările lui Aristotel, logicienii au împărţit erorile informale în erori de prezumţie, de ambiguitate, de relevanţă ş.a. Nu este obligatoriu să le întâlnim peste tot la fel, fiecare autor îşi are, dacă nu propria lui listă de erori, cel puţin propria sa organizare. De aici tot felul de dificultăţi, nu neapărat terminologice.

Tabelul 1 conţine cele douăzeci şi şase de erori informale pe care le-am examinat în cartea mea *Logica*, vol. I (vezi p. 609 şi urm.) şi pe care le-am grupat în patru categorii (erorile marcate cu „*” apar în două rubrici diferite din cauza ambiguităţii şi a statutului lor incert).

Tabelul 1

Erori de relevanţă	**Erori de ambiguitate**	**Erori de prezumţie**	**Erori inductive**
Arg. ad baculum	*Echivocaţia*	*Petitio principii*	*Erori de*
Arg. ad ignorantiam	*Amfibolia*	*Întrebarea complexă*	*observaţie*
Arg. ad hominem	*Accentul*	*Error fundamentalis*	*Erori de*
Arg. ad misericordiam	*Compoziţia*	*Falsa dihotomie*	*generalizare*
*Arg. autorităţii**	*Diviziunea*	*Arg. ad*	*Argumentul*
*Petitio principii**	*Întrebarea complexă**	*Consecquentiam*	*autorităţii*
Arg. ad verecundiam		*Arg. ex silentio*	*Slaba analogie*
Arg. ad populum		*Accentul**	*Falsa cauză*
Ignoratio elenchi		*Ignoratio elenchi**	
Accidentul		*Non sequitur*	
*Error funfamentalis**			
Omul de paie			
*Non sequitur**			

Revin acum la întrebarea de fond a discuţiei noastre: pot explica erorile menţionate sau altele, nemenţionate, dar de acelaşi tip cu ele, mecanismul producerii paradoxurilor? Ținând cont de natura acestor erori, ca şi şi de modul cum afectează ele activitatea umană, practică şi/sau teoretică, voi dezvolta întrebarea de mai sus printr-un set de alte câteva întrebări:

(1) Este paradoxul o eroare formală sau una informală?

(2) Dacă paradoxul este o eroare logică de un fel anume, este el un sofism, un paralogism sau o aporie?

(3) Poate fi eroarea paradoxală evitată, eventual corectată? Iar dacă nu poate fi evitată, se mai poate numi ea eroare?

(4) Dacă paradoxul nu este el însuşi o eroare, ci consecința unei erori, face aceasta parte din categoria erorilor cunoscute?

(5) Toate paradoxurile se datorează aceleiaşi erori? Sunt erorile generatoare de paradoxuri diferite între ele?

Aceleaşi întrebări pot fi puse înlocuind termenul *paradox* cu termenul *contradicție* (coloana *A* a tabelului 2); sau termenul *eroare* cu cel de *contradicție* (coloana *B*). Prima înlocuire se justifică prin faptul că paradoxul, fiind o specie de contradicție, întrebările despre paradoxuri sunt implicit întrebări despre contradicții. La fel în cea de-a doua înlocuire: erorile duc fie la contradicții, fie la ceva fals; dar falsul este contradictoriul adevărului; prin urmare, a întreba despre eroare revine la a întreba despre contradicția pe care o produce eroarea.

Interesantă, deşi nu lipsită de dificultăți, este întrebarea *A*1: ce fel de eroare este contradicția, una formală sau una materială? Şi ce înseamnă, la drept vorbind, o contradicție materială?

Nu tot ce este notoriu este neapărat şi cunoscut, spunea undeva Hegel în prima sa prefață la *Fenomenologie*, observație potrivită şi contradicției, pe care mulți o confundă cu alte concepte din zona opozițiilor. Confuzia cea mai des întâlnită este însă cea dintre contradicție şi propoziția contradictorie.

Tabelul 2

A	***B***
1. Este contradicția o eroare formală sau una informală (materială)?	1. Este paradoxul o contradicție formală sau una informală (materială)?
2. Dacă contradicția este o eroare logică, este ea un sofism, un paralogism sau o aporie?	2. Dacă paradoxul este o contradicție logică, este el un sofism, un paralogism sau o aporie?
3. Poate fi contradicția evitată (eventual corectată)?	3. Poate fi paradoxul evitat (eventual corectat)?
4. Eroarea generatoare de contradicții face parte din categoria erorilor cunoscute?	4. Face parte paradoxul din categoria contradicțiilor cunscute?
5. Toate contradicțiile se datorează aceleiaşi erori? Sunt erorile generatoare de contradicții diferite între ele?	5. Toate paradoxurile constau în aceeaşi contradicție? Sunt contradicțiile paradoxale diferite între ele?

Simplu spus, contradicția este perechea de propoziții $\{P, \sim P\}$ în care dacă una dintre propoziții este adevărată, cealaltă este falsă, şi invers (cu „$\sim P$" s-a notat, ca de obicei, negația propoziției P).

Conform definiției, contradicția presupune două condiții – o condiție sintactică (referitoare la negație) şi una semantică (referitoare la adevărul/falsul propozițiilor) –, deşi acestea nu îşi corespund întotdeauna. Vreau să spun că nu întotdeauna propoziția şi negația ei stau în raport de adevăr-fals, cum cere definiția, s-ar putea foarte bine întâmpla ca ambele propoziții să aibă aceeaşi valoare de adevăr. Exemplul lui Aristotel din *Despre interpretare*, „Mâine va fi o bătălie navală", formează împreună cu negația sa o contradicție, dar care propoziție este adevărată şi care falsă? Va trebui să admitem că, astfel definită, contradicția aparține logicii bivalente, ea presupune ca propozițiile să fie evaluate doar prin adevăr şi fals. Ceea ce nu înseamnă că celelalte propoziții nu pot forma contradicții, la urma urmelor orice propoziție formează o contradicție împreună cu negația ei, însă, în mod cert nu toate contradicțiile au proprietățile contradicției bivalente.

Propoziția contradictorie este atunci propoziția care conține în formularea sa ingredientele contradiției; sau propoziția care implică contradicția; sau propoziția din care se deduce contradicția. În final, orice contradicție poate genera o propoziție contradictorie, şi invers, din orice propoziție contradictorie se poate ajunge la contradicție, însă, riguros vorbind, cele două nu se confundă.

Cea mai simplă formă de propoziție contradictorie este, fără îndoială, $P \mathbin{\&} \sim P$. Fiind vorba de o propoziție conjunctivă, din $P \mathbin{\&} \sim P$ se deduc atât P, cât şi $\sim P$, adică $\{P, \sim P\}$. De aici denumirea de contradicție inclusiv pentru propoziția contradictorie. Alte propoziții nu au formă de contradicție, ele doar implică contradicția. De exemplu, schema propozițională

$$\sim (P \to \sim Q) \mathbin{\&} \sim(P \to Q), \tag{1}$$

nu pare, la prima vedere cel puțin, a fi una contradictorie, şi totuşi, prin transformări echivalente ea poate fi adusă la forma

$$(P \mathbin{\&} Q) \mathbin{\&} (P \mathbin{\&} \sim Q) \tag{2}$$

din care se deduce apoi $Q \mathbin{\&} \sim Q$, respectiv, $\{Q, \sim Q\}$. Pentru că din (1) se deduce o contradicție, (1) este o schemă contradictorie de propoziții (din punct de vedere logic nu contează unde apare contradicția, în expresia propoziției sau printre consecințele ei, propoziția este contradictorie şi într-un caz şi în celălalt). Dat fiind că în conjuncția $P \mathbin{\&} \sim P$ una dintre propoziții este obligatoriu falsă, orice propoziție contradictorie, de orice formă ar fi ea, va fi mereu falsă. Repet, este vorba de logica bivalentă, în logicile cu mai multe valori lucrurile pot arăta şi altfel (la Łukasiewicz, de pildă, pentru valoarea *posibil* a variabilei P, propoziția $P \mathbin{\&} \sim P$ nu va fi falsă, ci tot posibilă).

O specie aparte de propoziție contradictorie este propoziția autocontradictorie, care poate fi simplu contradictorie sau paradoxal contradictorie. Spunând „Această propoziție este lipsită de sens”, producem o contradicție, mai exact o autocontradicție, pentru că, dacă propoziția ar fi adevărată şi deci lipsită de sens, nu am înțelege ceea ce spune ea, şi anume, că este lipsită de sens. Pentru că nu corespunde faptelor, propoziția este factual falsă, dar pentru că implică o contradicție, ea este şi logic falsă (termenii contradicției sunt propoziția şi ceea ce implică sau presupune propoziția, adică negația ei).

Nu la fel stau lucrurile când spunem „Această propoziție este falsă” (paradoxul mincinosului). Aparent, propoziția nu se contrazice pe sine şi, totuşi, dacă o luăm ca adevărată suntem nevoiți să o declarăm falsă, şi invers.

Contradicțiile care țin de forma propozițiilor sunt contradicții formale, iar cele care țin de conținutul lor sunt contradicții materiale. Termenul nu este cel mai potrivit având în vedere că orice contradicție este (sau se reduce la) o contradicție formală, dar dacă nu ne propunem scopuri prea înalte, el poate fi folosit fără probleme. Propoziția *Unii oameni sunt veşnici*, de pildă, nu are formă de contradicție, ea este un caz particular al formei *Unii S sunt P*, şi totuşi, fiind falsă, ea formează o contradicție împreună cu propoziția adevărată *Niciun om nu este veşnic*. Pentru orice propoziție falsă va exista aşadar o propoziție adevărată cu care aceasta formează o contradicție. Falsul material (sau factual) dă naştere la contradicții materiale (acceptăm provizoriu acest termen), în timp ce falsul logic (sau formal) dă naştere la contradicții formale. De unde deducem că orice propoziție falsă, de orice tip ar fi ea, presupune într-un fel sau altul contradicția.

Atitudinea logicii față de contradicție a fost constant una de respingere, şi aceasta din mai multe motive. Motivul principal este că dintr-o contradicție, respectiv o propoziție contradictorie, poate fi dedusă orice altă propoziție. Dacă L_T este limbajul unei teorii T şi dacă în T au fost deduse P şi $\sim P$, orice propoziție $Q \in L_T$ va putea fi dedusă în T. Demonstrația este foarte simplă. Presupunând că în logica lui T intră proprietatea implicației

$$\sim P \rightarrow (P \rightarrow Q), \tag{3}$$

din aceasta şi din $\sim P$, respectiv P, prin două aplicații *modus ponens* se deduce Q. Vorbim în acest caz de inconsistența teoriei T sau despre *explozia* lui T (după Gr. Priest). Cu alte cuvinte, o teorie T este inconsistentă dacă permite deducția tuturor propozițiilor ce se pot construi în limbajul lui T. Simbolic, aceste lucruri se exprimă prin relațiile:

$$Cn(\mathrm{T}) \subset \mathrm{L_T} \tag{4}$$

$$Cn\,(\mathrm{T}) = \mathrm{L_T}, \tag{5}$$

unde cu *Cn*(*T*) am notat mulțimea consecințelor deduse în *T*. Relația (4) exprimă consistența lui *T* (mulțimea formulelor deduse în teorie este inclusă strict în mulțimea formulelor construite în limbajul teoriei), iar (5) inconsistența ei. Pe scurt, o teorie *T* este consistentă logic dacă există formule în limbajul teoriei ce nu pot fi deduse în teorie.

În logica tradițională, respingerea contradicției era cerută printr-un principiu special – principiul noncontradicției – pe care Aristotel îl aprecia în *Metafizica* drept „cel mai sigur dintre principii” (în alt loc, el vorbeşte despre principiul noncontradicției ca despre un „principiu al principiilor”). Logica simbolică nu numai că nu va uzurpa această demnitate a principiului, dar, prin condiția consistenței logice, îi va da acestuia o formă mult mai exactă.

Condiția consistenței reeditează – în alt plan, se înțelege, şi în alți termeni – ceea ce medievalii numeau *ex contradictiones quadlibet sequitur* (din contradicție rezultă orice). Acesta este tot principiul noncontradicției, însă limitat la propoziții.

Ca să închei, contradicția este rezultatul unei erori sau este ea însăşi o eroare, depinde din ce unghi privim lucrurile. Însă oricum le-am privi şi orice interpretare le-am da, cerința necontradicției rămâne prima şi cea mai importantă cerință a logicii formale.

Atât în privința contradicției şi a întrebării A1. O întrebare nu mai puțin interesantă este B2. De vreme ce paradoxul este o contradicție, iar contradicția se datorează unei erori (am admis acest lucru prin ipoteză), ce fel de eroare este atunci eroarea paradoxală? Este ea o eroare paralogistică, ca să folosesc un termen din teoria tradițională a erorilor, sau una sofistică? Şi prin ce se deosebesc contradicțiile paralogistice de cele sofistice?

Paralogismele, fiind erori neintenționate, natural că şi contradicțiile generate de ele vor fi tot neintenționate. Dacă prin măsurători, de exemplu, s-a constatat că distanța de la *A* la *B* este de 17 km, iar distanța de la *B* la *A* numai de 15 km, s-a comis o eroare şi implicit o contradicție (rezultatul obținut contravine adevărului matematic $17 > 15$).

În sofisme, lucrurile stau oarecum diferit. Eroarea sofistică este intenționată, ceea ce o face nu doar mai interesantă, ci şi mai greu de corectat. Voi lua ca bază de discuție câteva dintre sofismele şcolii megarice:

Ai ceea ce nu ai pierdut; nu ai pierdut coarne, deci ai coarne.

Nu cunoşti acest om acoperit cu voal din fața ta. Dar acest om este fratele tău; deci nu îl cunoşti pe fratele tău.

Ce sunt eu nu eşti tu şi ce eşti tu nu sunt eu. Eu sunt om, deci tu nu eşti om.

Acest câine este tată; acest câine este al tău; acest câine este tatăl tău.

Rostul sofismelor este să contrazică un adevăr simplu şi evident cum ar fi acela că omul nu are coarne; sau că nu poate avea drept tată un câine, însă, contrar tuturor evidențelor, ele se străduiesc să susțină contrarul. De aici pretenția că orice poate fi argumentat (ceea ce nu se întâmplă cu demonstrația).

Lista sofismelor megarice este mult mai mare, nefiind însă la fel de reușite logic nu insist asupra lor. Şi cu toate că pun probleme mai speciale decât paralogismele, ele cad în sfera aceloraşi erori (ultimul sofism, de exemplu, provine din echivocația cuvântului „tată”).

Mai complicat stau lucrurile cu aporiile. Termenul provine tot din greacă (*a* + *poros*) şi înseamnă *blocaj*, *înfundătură* pentru rațiune (în traducere: *ceea ce nu poate trece*). Este vorba, evident, de aporiile lui Zenon, singurele după ştiința mea discutate în manualele de logică:

Ahile. Poate Ahile ajunge din urmă o broască țestoasă? Nu, pentru că în timp ce Ahile recuperează distanța până la țestoasă, aceasta a mai parcurs o distanță. În timp ce Ahile recuperează şi această nouă distanță, țestoasa mai parcurge o distanță. De fiecare dată țestoasa parcurge câte o distanță, deci Ahile nu va ajunge țestoasa niciodată.

Dihotomia. Săgeata care pleacă din arc îşi poate atinge ținta? Nu, pentru că mai întâi ea trebuie să străbată jumătatea distanței dintre arc şi țintă. Dar, ca să ajungă la jumătatea distanței dintre arc şi țintă, ea trebuie să străbată mai întâi jumătatea jumătății dintre arc şi țintă; însă şi aceasta se împarte în jumătate, şi tot aşa, la infinit. În final, săgeata nu îşi atinge ținta din simplul motiv că nu poate porni din arc.

Săgeata. Este săgeata care pleacă din arc în mişcare? Nu, pentru că în mişcarea ei săgeata se află în fiecare moment într-un loc egal cu ea însăşi. În acest loc şi în acest moment ea este în repaus; deci, mişcarea săgeții ar consta dintr-o infinitate de momente de repaus; deci mişcarea săgeții nu este posibilă.

Aporia stadiilor. Reformulez aporia după Aristotel luând în locul stadiilor trei rigle R_1, R_2 şi R_3, egale ca mărime, aşezate una sub cealaltă, având gradațiile *a*, *b*, *c*, *d*, respectiv, *m*, *n*, *o*, *p* şi *x*, *y*, *z*, *u*:

R_1

	a	*b*	*c*	*d*	

R_2

⟵	*m*	*n*	*o*	*p*	

R_3

	x	*y*	*z*	*u*	⟶

Poz. 1.

Prima riglă rămâne fixă în timp ce a doua şi a treia se deplasează în direcţii opuse, conform săgeţilor din poziţia 1:

R_1

a	*b*	*c*	*d*

R_2

m	*n*	o	*p*

R_3

x	*y*	*z*	*u*

Poz. 2.

În unitatea de timp necesară parcurgerii unei gradaţii, *x* a ajuns sub *b* şi sub *o*, deci a parcurs în aceeaşi unitate de timp *t* o gradaţie faţă de R_1 şi două gradaţii faţă de R_2. Dacă *t* este timpul necesar parcurgerii unei gradaţii, atunci $t = t/2$.

Ca şi sofismele, aporiile sunt argumente destinate susţinerii unor teze, în cazul de faţă tezelor eleate privind imposibilitatea mişcării şi a multiplicităţii, dar, la fel ca sofismele şcolii megarice, aporiile eleate sunt inegale ca forţă logică. În *Ahile*, de exemplu, ar trebui ca cei doi să alerge cu viteze egale pentru ca distanţa dintre ei să se menţină constantă. Astăzi ştim că viteza este un parametru esenţial al mişcării, ca şi durata, distanţa, acceleraţia ş.a., de care aporia nu ţine cont, ea vorbeşte de mişcare în general. Or, numai în condiţiile ignorării acestor parametri se poate spune că Ahile nu ajunge din urmă ţestoasa.

Aporia stadiilor comite o eroare şi mai elementară, aici este vorba de confundarea reperelor – unul şi acelaşi lucru este raportat concomitent la ceva în repaus şi la ceva în mişcare. Concluzia aporiei, $t/2 = t$ (jumătatea este egală cu întregul) provine tocmai din această confuzie.

Celelalte aporii pun problema divizibilităţii la infinit şi a raportului dintre infinitul continuu şi infinitul discret, de unde ideea abordării lor prin teoria matematică a seriilor, respectiv a limitelor. Nu intru în detalii pentru că nu acesta este subiectul urmărit[10].

Ca grad de elaborare logică, aporia trece înaintea sofismului, iar acesta înaintea paralogismului. Am putea spune despre aporie că se situează undeva între paradox şi sofism, ea este fie o formă mai slabă de paradox, fie o formă mai tare de

[10] O amplă discuţie pe tema aporiilor şi a problemelor logice pe care le ridică acestea, cititorul găseşte în cartea lui Gh. Enescu, *Paradoxuri*, *Sofisme*, *Aporii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003.

sofism. Voi adopta, în consecinţă, următoarea ierarhie privind modul de realizare a contradicţiei în cele patru raţionamente:

$$\text{Paralogism} \longrightarrow \text{Sofism} \longrightarrow \text{Aporie} \longrightarrow \text{Paradox}$$

Aceasta este prima mea teză, ca să spun aşa. Dacă ar fi să exprim simplu prin ce se deosebesc paradoxurile de aporii, sofisme şi paralogisme, aş spune că prin modul diferit de realizare a contradicţiei. Paradoxul, în sensul definiţiei clasice, este forma superioară de realizare logică a unei contradicţii.

Mă văd obligat să invoc şi o a doua teză, legat de ceea ce am numit cu altă ocazie *structura de suprafaţă* a argumentelor[11]. După părerea mea, fiecare argument din ierarhia considerată are o structură de adâncime şi una de suprafaţă. Structura de adâncime ţine de specificul conceptelor din enunţul argumentului (număr cardinal, mulţime, predicat etc.) şi de definiţiile acestora, iar cea de suprafaţă de modul în care sunt corelate în argument contradicţia, intenţia şi eroarea. Dacă notăm cu „+” şi „–” prezenţa, respectiv absenţa celor trei elemente din componenţa argumentelor putem proceda la următoarea comparaţie:

Tabelul 3

	Contradicţie	***Eroare***	***Intenţie***
Paralogism	+	+	-
Sofism	+	+	+
Aporie	+	+	+
Paradox	+	?	–

Contradicţia, din câte observăm, este prezentă peste tot, ea este elementul de legătură al celor patru argumente (ceea ce face din ele un subiect unic). Aporia şi sofismul, având toate elementele în comun, par să nu se deosebească între ele. O deosebire totuşi există şi acesta se datorează modului specific în care fiecare argument realizează contradicţia. Aşa cum am mai spus, sofismul este o formă mai slabă de aporie, sau invers, aporia o formă mai tare de sofism. Paradoxul, în schimb, dacă se va dovedi a fi consecinţa unor erori, ar putea fi subsumat paralogismului, el devine în acest fel o formă superioară de paralogism. În niciun caz însă paradoxul nu este un act de intenţie.

§5

Revin la raportul paradoxului cu eroarea. A pune paradoxul pe seama unei erori, sau pur şi simplu a-l declara *eroare*, nu înseamnă practic nimic, trebuie arătat

[11] Vezi I. Lucica, *Logica* I, p. 626.

în ce constă eroarea şi, mai mult decât atât, trebuie arătat cum duce eliminarea erorii la eliminarea paradoxului. În *Introduction to Metamathematics* (1967), St.C. Kleene spune că

> soluţia cea mai simplă (la problema paradoxurilor – a.n.) ar consta în localizarea erorii, ca în cazul greşelii comise de un elev într-un exerciţiu de demonstraţie algebrică sau geometrică, fără să mai fie nevoie de alte schimbări[12].

Dar este posibil aşa ceva? Putem noi spune despre fiecare paradox că îşi are eroarea sa care, odată corectată, duce la eliminarea lui? Sau că ar exista grupări de paradoxuri subsumate aceleiaşi erori? Sau, ceea ce ar fi de departe de preferat, că există o eroare comună, responsabilă pentru întreg fenomenul paradoxurilor? Această înţelegere a paradoxurilor este cunoscută astăzi sub numele de *ipoteza* (*teoria*) *soluţiei uniforme* (după Gr. Priest). Dacă prin echivalenţa paradoxurilor vizăm nu forma lor, cum am procedat la începutul § 2, ci faptul că ele se datorează aceleiaşi erori, atunci, în ipoteza soluţiei uniforme, toate paradoxurile sunt echivalente între ele. Forma tare a ipotezei admite, aşadar, o singură clasă de echivalenţă a paradoxurilor, spre deosebire de formele ei atenuate care admit mai multe asemenea clase.

Presupunând că am răspunde cel puţin uneia dintre întrebările puse, vine imediat întrebarea următoare: care dintre erorile conţinute în tabelul 1 este responsabilă de producerea paradoxurilor? Există fie şi un singur paradox explicabil din perspectiva unei asemenea erori?

Aici este marea problemă. După cum am mai spus, eu nu cred că teoria erorilor este suficient de elaborată astăzi pentru a face faţă provocării paradoxurilor.

Şi totuşi, o discuţie s-ar putea angaja pe marginea paradoxului mincinosului şi a erorii *tu quoque*. Este vorba de un caz particular al argumentului *ad hominem circumstanţial* ce constă în respingerea argumentului unui interlocutor, fără analiză, prin întoarcerea lui împotriva interlocutorului. Să presupunem că cineva, un parlamentar, să zicem, ar avea iniţiativa legislativă de-a interzice pentru un număr de ani armele de vânătoare argumentând că în ţara noastră vânătoarea s-a însoţit întotdeauna cu braconajul, că efectivele de animale s-au redus în ultimii ani, că multe specii sunt pe cale de dispariţie etc. Comitem eroarea *tu quoque* dacă i-am reproşa parlamentarului că el însuşi este vânător, că are casa plină de trofee etc., de unde am deduce apoi că propunerea lui nu se susţine. Procedând astfel, am respinge propunerea din cu totul alte considerente decât prin analiza argumentelor, care, în ciuda faptului că parlamentarul este vânător, ar putea fi totuşi valide.

Obiecţia de pe poziţia *tu quoque* la afirmaţia lui Epimenide ar fi că şi el este cretan şi, cretan fiind, nu poate face o astfel de afirmaţie – nu ai autoritatea morală să-i declari pe cretani mincinoşi de vreme ce tu însuţi eşti cretan şi deci mincinos. O apreciere de ordin moral ce vizează persoana celui care face afirmaţia, dar este oare acest considerent moral suficient respingerii?

[12] St.C. Kleene, *Introduction to Methamathematics*, p. 40.

Avem două posibilităţi de raţionare: 1) respingem ca mincinoasă afirmaţia lui Epimenide, atitudine ce va duce, cum s-a văzut, la contradicţie; şi 2) respingem afirmaţia prin ignorare (nu discut afirmaţiile unui mincinos), însă aceasta este o respingere dogmatică, fără vreun interes logic deosebit. Ca să nu mai vorbim de faptul că norma morală, fiind mai slabă decât norma logică, s-ar putea ca nu orice încălcare morală să fie neapărat şi o încălcare logică.

O respingere cu caracter moral întâlnim şi în *Noul Testament*, în *Epistola lui Pavel către Titus*: „Unul dintre ei, chiar prooroc a lor a zis: *cretanii sunt întotdeauna nişte mincinoşi*, *nişte fiare rele*, *niste pântece leneşe*. Mărturia aceasta este adevărată.” (*Epistola*, 1, 12–13).

Apreciată strict logic, afirmaţia lui Pavel duce la contradicţie: cretanii sunt întotdeauna mincinoşi; această afirmaţie este făcută de un cretan; deci şi ea este mincinoasă; deci cretanii nu sunt întotdeauna mincinoşi. Totuşi, nu se poate spune că mesajul lui Pavel nu ar fi înţeles, că el ar fi afectat în vreun fel de paradox, dovadă că nici în vorbire liberă contradicţia nu funcţionează întotdeauna la fel.

Eroarea *tu quoque* poate fi corelată cu eroarea generalizării pripite. La urma urmelor, câte minciuni ar trebui să spună cineva pentru a fi declarat mincinos? Şi câţi cretani sunt vizaţi prin generalizarea „Toţi cretanii sunt mincinoşi”?

O examinare atentă ne va arăta că atât prima, cât şi cea de-a doua întrebare evidenţiază o generalizare nepermisă – niciun om nu poate spune numai minciuni, şi nici o comunitate nu se poate compune numai din mincinoşi. Prin urmare, chiar dacă propoziţia „Toţi cretanii sunt mincinoşi” are aceeaşi formă logică cu „Toţi oamenii sunt muritori”, cele două propoziţii se deosebesc în privinţa cuantorului „toţi”. Numai dacă „toţi” din enunţul lui Epimenide are sensul său strict, de toţi fără excepţie, se produce contradicţia, o interpretare, cum s-a văzut, imposibil de acceptat. Se deschid astfel două căi de abordare paralogistică a mincinosului în varianta Epimenide – blocarea concluziei prin atacarea argumentatorului, respectiv, prin atacarea termenului „mincinos” – ambele variante având ca punct de plecare una dintre erorile teoriei clasice.

Nu exclud posibilitatea ca şi alte erori din tabelul 1 să permită observaţii interesante şi nu doar pe tema paradoxului mincinosului (despre *întrebarea complexă* voi vorbi în capitolul următor), aici vreau să mă opresc foarte pe scurt asupra erorii cercului vicios, cea mai clamată eroare din întreg spectrul erorilor logice puse în discuţie de fenomenul paradoxurilor. O întâlnim în teoria tipurilor (B. Russell), în concepţia semantică asupra adevărului (A. Tarski), în aplicaţiile raţionamentului diagonal, precum şi în alte concepţii şi teoretizări de mai mică anvergură care au ca obiect explicarea paradoxurilor.

În logica tradiţională, eroarea cercului vicios era asociată cu definiţia şi cu demonstraţia, însă am impresia că nici într-un caz, nici în celălat, lucrurile nu au fost duse până la capăt. Vreau să spun că nici în privinţa definiţiei, nici în privinţa demonstraţiei nu se arată cu claritate pe cine afectează eroarea şi pe cine nu afectează ea. Definiţia circulară, de exemplu, se produce ori de câte ori definitorul (numit şi *definiens*) depinde într-un fel sau altul de definit (sau *definiendum*), aşa încât ajungem până la urmă să definim lucrul prin el însuşi. Numai că definiţiile de acest fel se exprimă prin propoziţii adevărate şi atunci ne întrebăm cine este de fapt eronată, definiţia sau propoziţia prin care se exprimă definiţia? Spunând despre psihologie că este *ştiinţa proceselor psihice*, producem, fără îndoială, o definiţie circulară, chiar una tautologică, deşi propoziţia prin care se exprimă definiţia este adevărată. Pentru că definiţiile circulare se exprimă prin propoziţii adevărate, niciodată aceste definiţii nu vor dispare cu totul din ştiinţă (în *Teoria sistemelor logice*, p. 152, Gh. Enescu dă un exemplu de definiţie circulară în matematică – limita superioară a unei mulţimi de numere reale este cel mai mare număr din mulţime).

Şi tot astfel în cazul demonstraţiei, unde eroarea cercului vicios nu afectează validitatea argumentelor, ci noutatea concluziilor acestor argumente, ceea ce, iarăşi, înseamnă altceva. Silogismul, spunea H. Poincaré – prin silogism, el înţelege raţionamentul deductiv în genere – nu ne poate învăţa nimic nou, întrucât, „dacă totul trebuie să iasă din principiul identităţii, totul trebuie, de asemenea, să se poată reîntoarce aici”[13]. Dacă matematica ar fi pur deductivă, spune mai departe Poincaré, teoremele atâtor tratate de matematică nu ar fi altceva decât tot atâtea moduri de-a spune că *A* este identic cu *A*. Cu alte cuvinte, o matematică pur deductivă (aluzie la teza logicistă) ar fi o imensă tautologie. Sau circularitate, ca să revenim la tema discuţiei noastre.

Cum se pune problema circularităţii în logica şi în matematica modernă? Sunt circularităţile logicii moderne diferite ca natură de circularităţile logicii clasice?

Logica matematică introduce entităţi noi (clase, funcţii, relaţii, numere cardinale şi ordinale etc.), care, la fel ca propoziţiile, sunt predispuse cercului vicios. Dacă propoziţia circulară era propoziţia ce se lua pe sine ca subiect, funcţia propoziţională comite eroarea cercului vicios dacă se ia pe sine ca argument. La rândul ei, clasa circulară este clasa care se ia pe sine ca element, şi aşa mai departe. Circularităţile în cauză se regăsesc în cele mai multe dintre paradoxurile moderne, fapt pentru care B. Russell a considerat oportun să facă din principiul cercului vicios principiul de bază al explicării tuturor paradoxurilor:

> În fiecare contradicţie (Russell numea paradoxurile cu termenul simplu de „contradicţie” –a.n.) ceva este enunţat despre *toate* cazurile de un fel anume, astfel că un nou caz pare a fi generat din ceea ce s-a enunţat, care este şi nu este de acelaşi fel cu cazurile din enunţarea la care se referă *toţi*[14].
>
> ....
>
> Toate aceste contradicţii au în comun presupunerea unei totalităţi, care, dacă ar fi legitimă, ar trebui extinsă prin noi membri definiţi în termenii totalităţii[15].

[13] H. Poincaré, *Ştiinţă şi ipoteză*, p. 27.

[14] B. Russell, *Mathematical Logic as Based on The Theory of Types*, în B. Russell, *Logic and Knowledge*, p. 61.

[15] *Ibidem*, p. 63.

Clasele ilegitime (sau fără totalitate), la fel ca funcţiile propoziţionale ilegitime, sunt respinse de Russell printr-o formă „actualizată” a principiului cercului vicios:

> Principiul care ne permite să evităm totalităţile ilegitime poate fi dat astfel: „Orice implică *toţi* ai unei colecţii nu trebuie să fie unul din colecţie”; sau invers: „dacă se presupune că o anumită colecţie, ce are o totalitate, ar avea membrii definiţi doar în termenii acestei totalităţi, atunci presupusa colecţie nu are nici o totalitate”. Vom numi acesta „principiul cercului vicios” din cauza faptului că ne permite să evităm cercul vicios din supoziţiile totalităţilor ilegitime. Argumentele ce vor fi respinse prin principiul cercului vicios vor fi numite „falaciile cercului vicios” (în orig. *vicious-circle fallacies*)[16].

În *Principia Mathematica*, din care am reprodus acest pasaj, paradoxurile sunt „falaciile cercului vicios”. Evident, nu ale vechiului cerc vicios din logica clasică, ci ale unui cerc vicios „modernizat”, dacă mă pot exprima astfel, un cerc vicios „adaptat” noilor condiţii din studiul raţionamentelor. În vederea eliminării lui, Russell construieşte *teoria tipurilor logice*, prima şi cea mai importantă concepţie paralogistică asupra paradoxurilor de la Aristotel până astăzi. O concepţie ce se voia a fi pe cât de radicală, pe atât de definitivă, însă dezvoltarea logicii de după *Principia* nu a confirmat aşteptările lui Russell. Mai întâi că, prin teoria tipurilor, sunt respinse şi construcţii logice valabile, motiv pentru care Russell introduce controversata *axiomă a reductibilităţii*. Propoziţia autoreferenţială „Această propoziţie nu are cinci cuvinte”, de exemplu, prezintă acelaşi viciu de construcţie cu propoziţia paradoxală „Această propoziţie nu este adevărată”, şi totuşi, propoziţia este adevărată.

Cel mai puternic argument împotriva principiului cercului vicios vine însă dintr-o cu totul altă direcţie. Anumite domenii din logică, matematică şi ştiinţa computerelor, spune Roy T. Cook, se bazează pe „construcţii fundamentale”, care, fără a fi paradoxale, sunt circulare în exact aceeaşi fel cu paradoxul mincinosului[17].

Construcţia „fundamentală” la care se referă R.T. Cook este prima teoremă Gödel de incompletitudine. Fără a intra în detalii, voi încerca să arăt în ce constă circularitatea invocată de Cook şi ce legături are ea cu paradoxul mincinosului. Reamintesc, în acest scop, câteva lucruri despre noţiunea de *număr gödelian* şi despre *lema diagonalizării* cu aplicabilitate la numerele gödeliane.

În celebrul său memoriu din 1931, Gödel a construit sistemul P, izomorf sistemului logico-aritmetic din *Principia Mathematica*, în care expresiile *Principiei* sunt transformate pur şi simplu în numere. Printr-un algoritm anume conceput se poate calcula pentru orice număr *n* dacă *n* corespunde sau nu unei expresii, şi dacă da, care este acea expresie. De asemenea, fiind dată o expresie oarecare, printr-un algorim similar poate fi determinat numărul gödelian al expresiei. De precizat că asocierea numere-expresii din aritmetizarea gödeliană este biunivocă (nu există

[16] A.N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica* to ∗56, p. 37–38.
[17] R.T. Cook, *op. cit.*, p. 35.

două numere ale aceleiaşi expresii, şi nici invers). În plus, numărul gödelian al unei expresii Ψ, simbolizat cu ⟨Ψ⟩, poate fi luat şi ca nume al expresiei Ψ. Vorbim în acest caz de *numele gödelian* al expresiei.

Lema diagonalizării, relativ la expresii şi la numerele gödeliene ale expresiilor, stabileşte că pentru orice predicat Φ din P, există un enunț Ψ astfel că

(1) $$\Psi \equiv \Phi\,(\langle\Psi\rangle).$$

Cu alte cuvinte, propoziția Ψ este echivalentă cu propoziția care afirmă că predicatul Φ se enunță despre numărul gödelian al propoziției Ψ. Gödel introduce în P predicatul *Bew*, prescurtarea cuvântului *beweisbar* (demonstrabil) din germană, pe care îl leagă de noțiunea de *adevăr*:

(2) *Bew*(⟨Ψ⟩) este adevărată dacă şi numai dacă ⟨Ψ⟩ este numărul gödelian al unei propoziții demonstrabile.

Pentru că predicatul *Bew* se aplică exclusiv numerelor gödeliene corespunzătoare propozițiilor demonstrabile din P, prin negație obținem predicatul *non-Bew*, aplicabil numerelor gödeliene ce nu corespund unor propoziții demonstrabile. Dar, pentru că *non-Bew* este tot un un predicat, prin lema (1) va trebui să existe în P o propoziție δ astfel că

(3) $$\delta \equiv \textit{non-Bew}\,(\langle\delta\rangle).$$

Relația (3) spune ceva simplu şi fundamental: propoziția δ este echivalentă cu propoziția care afirmă că nu este demonstrabilă propoziția cu numărul gödelian ⟨δ⟩. Legătura cu prima teoremă Gödel de incompletitudine rezultă din întrebarea dacă δ este sau nu demonstrabilă în P. Presupunând că δ este demonstrabilă, ⟨δ⟩ fiind numărul ei gödelian, prin relația (2) va fi adevărată *Bew* (⟨δ⟩). Dar dacă δ este demonstrabilă, prin (3) va fi demonstrabilă şi *non-Bew* (⟨x⟩). Aşadar, în eventualitatea că δ este demonstrabilă este adevărată atât *Bew* (⟨δ⟩), cât şi *non-Bew* (⟨δ⟩). Prin urmare, δ nu poate fi demonstrabilă în P. Însă δ chiar acest lucru îl spune, că nu este demonstrabilă în P, şi atunci δ este adevărată.

Concluzia vine de la sine: relativ la P va exista întotdeauna o propoziție adevărată şi nedemonstrabilă. Altfel spus, în eventualitatea că P este consistent, el este totuşi incomplet.

Aceasta a fost prima „construcție fundamentală" la care face referire R.T. Cook în discuția sa privind circularitățile paradoxale. Cea de-a doua „construcție" la care se referă el este aşa numita Teoremă a lui Tarski (demonstrată independent şi de Gödel). Conform teoremei, într-un sistem P de complexitatea sistemului din

Pr. Math. nu poate exista un predicat T al adevărului astfel ca toate instanțele schemei

(5) $$T(\langle\alpha\rangle) \equiv \alpha$$

să fie demonstrabile în P (în această relație $\langle\alpha\rangle$ este numele (gödelian) al expresiei α). Aplicăm mai departe lema diagonalizării predicatului *non-T* şi obținem o altă versiune aritmetică a paradoxului mincinosului

(6) $$\zeta \equiv non\text{-}T\,(\langle\zeta\rangle),$$

(propoziția ζ este echivalentă cu propoziția care afirmă că, în P, nu este adevărată propoziția desemnată prin numele gödelian $\langle\zeta\rangle$). În continuare, aplicăm relația (5) propoziției ζ şi obținem

(7) $$T(\langle\zeta\,\rangle) \equiv \zeta$$

iar din aceasta şi din (6), prin tranzitivitate, obținem contradicția

(8) $$T(\langle\zeta\rangle) \equiv non\text{-}T\,(\langle\zeta\rangle).$$

S-a demonstrat astfel că sistemul P nu poate conține un predicat corespunzător schemei (T) din definiția tarskiană a adevărului. Un rezultat cât se poate de firesc dacă ne gândim la conținutul primei teoreme Gödel de incompletitudine.

Care este, în final, „morala” celor două teoreme? Ce demonstrează ele relativ la ideea de circularitate?

Simplu spus, cele două teoreme zădărnicesc orice idee de soluționare a paradoxurilor prin eliminarea circularităților vicioase. Conform ideii de cerc vicios descrisă ceva mai devreme, atât propoziția gödeliană δ, cât şi ζ, ar trebui declarate ca lipsite de sens. O pastilă greu de înghițit (exprimarea lui R.T. Cook) presupusă de operația eliminării paradoxurilor. Prin urmare, dacă teoremele de incompltitudine restricționează sistemul formal P (un asemenea sistem nu mai poate îngloba întreaga matematică), prin lema diagonalizării este restricționată, până la anulare, însăşi teoria tipurilor.

§6

Primul autor care tratează paradoxul alături de aporie, sofism şi paralogism, într-o abordare logică şi filosofică cât de cât unitară este, după cum am mai spus, Aristotel. Nu ştiu însă ca ideile lui Aristotel să fi contat în discuțiile modernilor despre paradoxuri, aşa că se impune o reevaluare a acestor idei în contextul logicii actuale. Întrebarea este: putem noi realmente vorbi de o concepţie aristotelică în materie de paradoxuri? Şi dacă da, în ce constă ea? Care sunt ideile forţă ale acestei concepţii şi cât de actuale mai sunt ele pentru logică?

Primul context aristotelic în care se face vorbire de paradoxuri este capitolul 3 din *Respingerile sofistice*, unde Aristotel enumeră scopurile sofisticii:

> Trebuie mai întâi să ne dăm seama câte scopuri urmăresc acei care discută ca luptători şi ca rivali. Scopurile lor sunt cinci: respingerea, falsitatea, paradoxul, solecismul şi al cincilea – momirea respondentului spre pură vorbărie, adică constrângerea lui de a spune de mai multe ori acelaşi lucru. În toate aceste cazuri, aceasta înseamnă a produce aparenţa lor, nu realitatea. Prin aceste scopuri, ei urmăresc în primul rând, să dea aparenţa că au respins pe respondent; în al doilea rând să arate că el a spus o falsitate; în al treilea rând, că l-au silit să recurgă la paradox; în al patrulea rând, că l-au silit să facă un solecism (adică respondentul, ca urmare a argumentării, este determinat să întrebuinţeze barbarisme; în cele din urmă că l-au făcut să repete acelaşi lucru de mai multe ori[18].

Aristotel vorbeşte în acest pasaj despre raţionamentele celor angajaţi în controverse şi dezbateri, consecinţa rolului cu totul excepţional pe care l-a avut dialogul în democraţia greacă. Faptul că în dezbaterile publice îşi găseau locul diverse forme de argumentare, unele corecte, altele mai puţin corecte sau voit incorecte, l-a determinat pe Aristotel să acorde aceeaşi importanţă respingerii ca şi raţionamentului direct. De reţinut că la Aristotel respingerea este „silogismul contradicţiei”, acesta însemnând silogismul (raţionamentul) prin care, plecând de la o teză *T*, se argumentează *non-T*. Pentru că *T* şi *non-T* formează împreună o contradicţie, raţionamentul respingerii este *raţionamentul contradicţiei*, mai exact spus, raţionamentul prin care se realizează contradicţia.

Cum este şi firesc, unele respingeri sunt corecte sau autentice, în timp ce altele au doar aparenţa de corectitudine. Acestea sunt aşa numitele *respingeri sofistice* de care se ocupă Aristotel în lucrarea lui cu acest titlu. Pe lîngă argumentele sofistice, el invocă tot aici şi argumentele eristice, acestea comit aceleaşi erori cu argumentele sofistice, diferenţa fiind numai de scop (raţionamentele sofistice au rolul de a crea impresia unei argumentări, respectiv a unei respingeri corecte, în timp ce eristica şi raţionamentele eristice au ca scop câştigarea cu orice preţ a disputei).

În privinţa încadrării paradoxului, la Aristotel lucrurile par destul de clare. Fiind cel de-al treilea obiectiv al sofisticii (cf. pasajului citat mai sus), paradoxul pentru el este o specie de sofism. Sau de paralogism, pentru că Aristotel nu distinge suficient de clar între cei doi termeni. Este drept că în capitolul 1 al *Topicii* el are o tentativă de definire a paralogismului, însă toate aprecierile lui din acest capitol se referă exclusiv la ştiinţă. Paralogismul, spune Aristotel în acest capitol, este raţio-

[18] Aristotel, *Respingerile sofistice*, în *Organon* vol. IV, p. 272–273.

namentul care pleacă de la presupuneri ce cad în domeniul unei științe, dar care nu sunt adevărate. A crede, de exemplu, că dintre două unghiuri care au aceeaşi deschizătură a laturilor este mai mare unghiul cu laturile mai lungi, înseamnă să comiți un paralogism în domeniul geometriei. Şi tot astfel în celelalte științe.

Reluând problema în *Respingeri*, Aristotel nu mai ține cont de domeniu şi aplică termenul „paralogism" tuturor raționamentelor şi respingerilor care sunt aparente, nu reale. Pe de altă parte, „aparența de înțelepciune", ne-o spune tot Aristotel, caracterizează sofistica şi atunci „aparența de corectitudine" ar trebui să fie atributul sofismului, nu al paralogismului.

Adevărul este că Aristotel începe prin a vorbi de paralogisme, dar continuă prin a vorbi de sofisme, de unde deducem că în *Respingeri*, cel puțin, el nu face nici o deosebire între cei doi termeni. Nu ştim exact cine şi când anume a făcut pentru prima dată această deosebire în logica clasică, cert este că ea apare foarte clar exprimată de Kant în micul său manual de logică:

> Raționamentul care este fals după formă, spune Kant, chiar dacă are aparența unui raționament corect pentru sine, se numeşte *înşelător* (*fallacia*). – Un astfel de raționament este un *paralogism*, dacă prin el ne înşelăm pe noi înşine, sau un *sofism*, dacă prin el încercăm în mod intenționat să-i înşelăm pe alții.[19]

La Kant, cel puțin, intenția este cea care face deosebirea dintre paralogism şi sofism, chiar dacă eroarea lor este aceeaşi (faptul că mulți autori nu acordă importanță respectivei distincții nu se datorează neapărat confuziei, ci nevoii de-a identifica eroarea în cele două forme de raționament).

Revenind la Aristotel şi la paradoxuri, trebuie spus că Aristotel nu are o definiție foarte clară nici în privința paradoxului, dar nu pentru că o atare definiție i-ar fi ridicat dificultăți de vreun fel anume, ci pur şi simplu pentru că termenul „paradox" era atât de vehiculat în epocă încât nu necesita o definiție. Ceea ce nu mai este valabil în zilele noastre. Ce nu ştim noi astăzi este dacă prin paradox Aristotel înțelegea inclusiv paradoxul mincinosului, adică paradoxurile în sensul modern al termenului.

Neavând textele necesare, tot ce putem face este să analizăm cele câteva exemple de paradoxuri date de el în *Respingeri*. Relativ la aceste exemple, Aristotel are o observație de cea mai mare importanță – *paradoxul se realizează printr-un anume mod de-a pune întrebări şi prin interogarea însăşi*.

Că nu este vorba de o observație pasageră, ci de o veritabilă argumentare ne-o demonstrează capitolul 12 al *Respingerilor*, dedicat în întregime acestei teme. Redau mai jos patru contexte preluate din capitolul 12 al *Respingerilor* în care Aristotel leagă paradoxul de actul întrebării:

[19] Imm. Kant, *Logica generală* (trad. Al. Surdu), Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985, p. 186.

Primul context. În ceea ce priveşte presupunerea că respondentul comite o eroare şi că se avântă în susţineri paradoxale (şi acesta este al doilea scop al sofisticii), acest scop se realizează printr-un anumit fel de a pune întrebări şi prin interogarea însăşi[20].

....

Al doilea context. De asemenea, a pune mai multe întrebări, chiar dacă a fost determinat obiectul de discutat, şi a îndemna pe respondent să spună ce gândeşte este un prilej de a-l induce în susţineri paradoxale şi în eroare. Dacă la una dintre întrebări el răspunde prin da sau nu, sofistul îl va împinge spre o poziţie care este uşor de atacat[21].

....

Al treilea context. Un procedeu elementar de a face pe cineva să comită o eroare sau să susţină un paradox este de a nu pune în discuţie imediat o teză determinată, ci de a pretinde că pune întrebări din dorinţa de a se instrui; un astfel de proces de examinare deschide perspective pentru atac[22].

....

Al patrulea context. Pe de altă parte, pentru a provoca susţineri paradoxale, trebuie să ne dăm seama din ce şcoală de filosofi face parte respondentul şi apoi să întrebăm despre acele aspecte ale doctrinei care par a fi paradoxale pentru majoritatea oamenilor. Căci în orice şcoală se întâlnesc asemenea opinii. Mijlocul elementar este de a formula ca premise disponibile tezele diferitelor şcoli. În acest caz, soluţia cea mai potrivită este de a arăta că paradoxul nu rezultă din argumentul însuşi , şi tocmai aceasta vrea să arate întotdeauna respondentul[23].

Conform primului context, paradoxul rezultă din modul de-a pune întrebări şi din răspunsurile date întrebărilor. Pentru că, spune mai departe Aristotel, unele întrebări sunt de aşa natură încât orice răspuns am da rezultă un paradox. Şi, cu toate că nu duce argumentarea până la capăt, Aristotel are câteva exemple de întrebări care ne ajută să înţelegem despre ce fel de paradoxuri este vorba:

Trebuie să ascultăm de înţelepţi sau de tată?
Trebuie să facem ce este util sau ce este drept?
Este mai bine să suferim un rău sau să-l facem?

Să luăm prima întrebare. Avem două variante de răspuns: 1) trebuie să-i ascultăm pe înţelepţi şi 2) trebuie să ascultăm de tată. Dacă dăm primul răspuns, urmează imediat concluzia *nu trebuie să-ţi asculţi tatăl* (afară de cazul în care şi tatăl ar fi unul dintre înţelepţi, supoziţie neluată în calcul de Aristotel). Dacă dăm al doilea răspuns, în baza aceleiaşi supoziţii, urmează concluzia că *nu trebuie ascultaţi cei*

[20] Aristotel, *op. cit*., p. 312.
[21] *Ibidem*, p. 312–313.
[22] *Ibidem*, p. 313.
[23] *Ibidem*, p. 313.

înțelepți. Aşadar, orice răspuns am da urmează o propoziție ce contravine unui adevăr simplu şi evident. Adică o concluzie „inacceptabilă”, ca să revin la definiția lui Sainsbury dată paradoxului.

În dezbaterile filosofice, continuă Aristotel, pot fi produse paradoxuri similare, cu precizarea că aici întrebarea trebuie legată de aspectele cele mai puțin credibile ale filosofiei în cauză (vezi al patrulea context). Dacă vrem, de exemplu, să construim un paradox pe terenul filosofiei eleate, putem pune întrebarea dacă mişcarea este sau nu posibilă, pentru că răspunsul eleaților la întrebare este „paradoxal pentru majoritatea oamenilor”. Într-adevăr, răspunsul eleat „mişcarea nu este posibilă” contravine unui fapt simplu şi evident şi deci argumentul ar putea fi oprit aici. El poate fi însă şi continuat dacă vrem să ducem contradicția până la capăt. Următoarea secvență deductivă, deşi nu apare la Aristotel, este prelungirea logică a aceluiaşi paradox:

Spui că mişcarea nu este posibilă, dar spunând acest lucru tu vorbeşti. Vorbind, pui în mişcare organele vorbirii. Dacă mişcarea nu este posibilă, cum pretinzi, nu ai putea spune acest lucru. Dar tu l-ai spus; deci mişcarea este posibilă.

Chiar dacă interogația vizează la Aristotel un concept mai slab de paradox şi chiar dacă argumentarea lui nu este întodeauna lipsită de echivoc, observația că paradoxul nu se manifestă în absența întrebării merită examinată cu toată atenția. Înclin să cred că nu numai paradoxurile aristotelice presupun întrebarea, ci şi paradoxurile moderne, pentru că nici în paradoxul mincinosului, nici în paradoxul lui lui Russell, şi nici în celelate paradoxuri nu ajungem la contradicție altfel decât întrebând. Ipoteza mea, în baza celor văzute la Aristotel, este că fiecare paradox îşi are propria sa întrebare şi că în absența întrebării contradicția din paradoxurile respective rămâne o simplă posibilitate nerealizată. În paradoxul mincinosului, de exemplu, trebuie să ne întrebăm dacă Epimenide minte sau spune adevărul. În paradoxul lui Russell, paradoxală este chiar întrebarea: mulțimea tuturor mulțimilor ce nu se conțin pe sine, se conține sau nu pe sine? În paradoxul lui Berry, întrebarea este dacă definiția celui mai mic număr natural ce nu poate fi definit în mai puțin de 27 de cuvinte are mai puțin de 27de cuvinte? Şi aşa mai departe, fiecare paradox este, sau poate fi, asociat unei întrebări. Să mai observăm că întrebarea paradoxală are forma unei disjuncții exclusive: minte sau spune adevărul? Se conține sau nu pe sine? Poate fi definit sau nu poate fi definit în mai puțin de 27 de cuvinte? etc.

Ceva similar se întâmplă şi în paradoxurile aristotelice: trebuie urmat p sau trebuie urmat q? Evident, nu putem răspunde decât cu p sau cu q. Dacă disjuncția nu ar fi exclusivă, aceasta însemnând să putem răspunde atât cu p, cât şi cu q sau dacă am avea şi o a treia variantă r, construcția nu ar mai fi paradoxală. De aici o primă modalitate de contracarare a paradoxurilor aristotelice – a arăta că întrebarea generatoare de paradox nu este o disjuncție exclusivă, ci una neexclusivă; sau că disjuncția admite un terț.

Pentru că în paradoxurile aristotelice răspunsul *p* la întrebare îl implică pe *non-q*, iar răspunsul *q* pe *non-p*, între *p* şi *q* raportul nu este de contradicţie, ci de contrarietate, ceea ce constituie o altă diferenţă faţă de paradoxurile moderne, poate cea mai importantă.

Punând întrebarea sub forma unei disjuncţii, paradoxurile lui Aristotel se pot reformula ca dileme. Dilema complexă distructivă, de exemplu, poate fi modificată în sensul paradoxului aristotelic după cum urmează: dacă *p*, atunci *non-q*, şi dacă *q*, atunci *non-p*; sau *p* sau *q*; deci sau *non-q* sau *non-p*.

Aceeaşi idee exprimată ca dilemă simplă: dacă răspunzi cu *p* întrebării, urmează ceva inacceptabil (sau ceva fals), iar dacă răspunzi cu *q*, urmează tot ceva inacceptabil; deci fie că răspunzi cu *p*, fie cu *q*, urmează ceva inacceptabil.

Dar oare nu este aceasta dilema oricărui paradox? În definitiv, nu acelaşi lucru se întâmplă şi cu paradoxul lui Russell? Dacă *impredicabil* se predică despre sine, urmează o contradicţie; iar dacă nu se predică, urmează tot o contradicţie. Deci fie că *impredicabil* se predică sau nu despre sine urmează o contradicţie. Şi tot astfel în paradoxul mincinosului. De unde deducem raportul paradoxului cu dilema – orice paradox poate fi asociat unei dileme, inclusiv paradoxurile moderne, însă nu paradoxul este consecinţa dilemei, ci invers, dilema este consecinţa paradoxului.

Revin la problema întrebării. Cele mai multe dintre întrebările paradoxale sunt de tipul „da – nu", totuşi nu-mi dau seama dacă putem face din aceasta o regulă. Putem, în schimb, formula următorul paradox în formă interogativă:

Are această întrebare răspuns?

la care se răspunde tot cu „da" sau „nu". În general, răspunsul cu „da" reprezintă forma prescurtată a unui răspuns mai complex ce poate fi exprimat sau nu, după caz. În situaţia de faţă, răspunsul „da" atrage după sine a doua întrebare: *care este acest răspuns*? Or, la această nouă întrebare nu mai putem răspunde; deci întrebarea nu are răspuns. Iar dacă răspundem cu „nu" întrebării, vrând să spunem că întrebarea nu are răspuns, prin aceasta chiar am răspuns întrebării şi deci întrebarea are răspuns. Aşadar, dacă întrebarea are răspuns, ea nu are răspuns şi dacă nu are răspuns, ea are răspuns.

Paradoxul întrebării sau al *interogaţiei*, propun să-l numim astfel, este un paradox de legătură între paradoxurile aristotelice din *Respingeri* şi paradoxurile moderne. În plus, paradoxul confirmă condiţia lui Aristotel din primul context potrivit căruia „paradoxul rezultă din modul în care punem întrebări şi din interogaţia însăşi". Nu spun că Aristotel s-ar fi gândit la un astfel de paradox când a făcut această precizare, tot ce spun este că o atare interogaţie satisface atât condiţia paradoxurilor aristotelice, cât şi condiţia paradoxurilor moderne.

Ce alte concluzii s-ar mai putea desprinde din ipoteza interogaţiei paradoxale?

O primă concluzie ar fi că ipoteza se răsfrânge inclusiv asupra ideii de contradicție facilitând aici câteva distincții pe care nu le întâlnim nici în logica clasică, nici în cea modernă. Este vorba în primul rând de distincția dintre contradicția activă şi contradicția pasivă, despre care am mai vorbit. Contradicția paradoxală este o contradicție pasivă, ea se cere activată prin întrebare, spre deosebire de contradicția paralogistică şi de cea sofistică unde o asemenea condiție nu se pune (contradicțiile paralogistice şi cele sofistice îşi produc efectele şi în absența întrebării).

Urmează apoi distincția dintre contradicția actuală şi contradicția potențială. Înțeleg prin contradicție actuală contradicția realizată, spre deosebire de contradicția potențială (sau de potențialitatea contradicției), care, deşi se poate realiza, nu este realizată încă.

În fine, este vorba de distincția dintre contradicția implicită şi cea explicită. Şi una, şi cealaltă sunt contradicții realizate, dar nu cu aceeaşi transparență logică. Este o distincție la fel de importantă, chiar dacă ea are la bază alte criterii.

În rezumat: 1) paradoxul, la Aristotel, este o propoziție ce contravine unui adevăr simplu şi evident; 2) paradoxul este o chestiune de construcție, el rezultă din modul de-a pune întrebări şi din întrebarea însăşi; 3) paradoxurile aristotelice pot fi circumscrise unor teorii (Aristotel se referă exclusiv la teoriile filosofice) sau pot fi construcții libere, îndreptate împotriva unor propoziții general acceptate; 4) ca şi aporiile, paradoxurile lui Aristotel sunt paralogisme de un tip mai special, ele conțin erori ce trebuie corectate. Consider, din acestă cauză, concepția lui Aristotel prima concepție paralogistică asupra paradoxurilor.

§7

Sub diferite forme, concepția paralogistică va continua până în secolul XX, ea continuă şi astăzi, cu efecte dintre cele mai neaşteptate asupra dezvoltării logicii şi matematicii. Să nu uităm că nevoia rezolvării (eliminării) paradoxurilor a obligat logica şi matematica la o evoluție unitară, în care, după expresia lui Russell, logica a devenit mai matematică în exact aceeaşi măsură în care matematica a devenit mai logică. Uriaşele progrese tehnologice de la sfârşitul secolului XX, în fruntea cărora se plasează revoluția informatică, sunt consecințele acestor matematizări şi logicizări pe care mulți le vedeau ca ținând exclusiv de domeniul teoreticului. Istoria a demonstrat însă că în ştiință şi cele mai înalte abstracții pot „coborî" în sfera aplicațiilor. Prima teoremă Gödel de incompletitudine face deja obiectul cercetărilor din domeniul inteligenței artificiale, iar logica paraconsistentă, apărută şi ea ca reacție la fenomenul paradoxurilor, se aplică de mult în controlul traficului aerian şi feroviar. Cu greu am putea găsi un domeniu al cunoaşterii şi acțiunii sociale, care, direct sau indirect, să nu poarte amprenta amplului proces de logicizare şi matematizare a ştiințelor.

O dialectică mai puţin înţeleasă, sau chiar neînţeleasă, face ca odată cu atingerea punctului ei de maxim, concepţia paralogistică să-şi arate imediat limitele. Sunt tot mai puţini astăzi cei care cred că paradoxurile s-ar datora unor erori punctuale, cum credea Russell şi cum se credea în prima parte a secolului XX, deşi, trebuie s-o recunoaştem, atâta timp cât paradoxurile sunt văzute exclusiv prin prisma necontradicţiei, respectiv a condiţiei de consistenţă logică, concepţia paralogistică va persista într-o formă sau alta. Orice demonstraţie de consistenţă este, în definitiv, un argument în favoarea soluţiei paralogistice, însă tocmai în acest punct am impresia că se pregăteşte lovitura. Paradoxurile, aşa cum ne-o arată cercetările ultimelor decenii, încep să fie văzute şi dincolo de condiţia consistenţei logice, într-o abordare, dacă nu independentă, cel puţin complementară acesteia. Un interes teoretic intrinsec pe care filosofii i-l atribuie paradoxului îl face pe acesta interesant nu doar logicianului şi matematicianului, ci şi metafizicianului şi chiar istoricului ştiinţei. Merită consemnată în acest context observaţia cercetătorilor din zona paraconsistenţei potrivit cărora, în dezvoltarea sa istorică, ştiinţa trece obligatoriu prin faza inconsistenţei logice şi a paraconsistenţei şi că astfel de inconsistenţe şi paraconsistenţe persistă uneori chiar şi în faza deplinei ei maturităţi. Privit sub acest unghi, paradoxul incetează de-a mai fi o vulnerabilitate, el devine semnul maturităţii ştiinţei şi al profunzimii ei.

O viziune interesantă asupra paradoxurilor, subsumată şi ea concepţiei paralogistice, însă fără unilateralizările acesteia, a dezvoltat la noi Gh. Enescu. În *Teoria sistemelor logice*, Enescu enumeră patru condiţii pe care o entitate trebuie să le satisfacă pentru a duce la paradox: 1) autologia (sau autoreferinţa), 2) negaţia, 3) singularitatea (respectiv, unicitatea), şi 4) supoziţia nepermisă a unei proprietăţi. Dacă fiecare dintre aceste condiţii este necesară eliminării paradoxului, numai împreună ele sunt suficiente.

Relativ la condiţiile enumerate, Enescu introduce noţiunea de *soluţie adecvată* la problema paradoxurilor. Este punctul tare al concepţiei lui, dar şi punctul lui slab, după cum voi încerca să arăt în cele ce urmează.

Fiecare condiţie în parte, notează Enescu, este suficientă eliminării paradoxurilor, însă o asemenea procedură ar fi prea largă, „ea ar afecta şi entităţi care satisfac restul condiţiilor şi nu duc totuşi la paradoxe, iar în unele cazuri astfel de entităţi sunt chiar normale”[24].

Într-adevăr, aici este cheia problemei – cum să dai o soluţie paradoxurilor care să nu elimine odată cu paradoxul şi alte lucruri?

În aprecierea pe care o face teoriei tipurilor, Roy T. Cook invoca şi el circularităţile neparadoxale, fără a vorbi însă de caracterul *inadecvat* al soluţiei teoriei tipurilor, el se referă doar la faptul că circularităţile în cauză sunt cerute de

[24] Gh. Enescu, *Teoria sistemelor logice*, p. 148.

anumite „construcţii fundamentale” din logică, matematică şi ştiinţa computerelor. Or, aşa cum am mai spus, axioma reductibilităţii a fost introdusă de Russell tocmai pentru a contracara această inadecvare a teoriei tipurilor.

Şi atunci ce este, sau în ce constă, soluţia adecvată?

Este soluţia, spune Enescu, „ce constă în a elimina exact acele entităţi care satisfac condiţiile indicate”[25].

Ceea ce nu am înţeles eu de la Enescu este dacă „soluţia adecvată” despre care vorbeşte el este un deziderat sau o soluţie efectivă. Care ar fi, de pildă, „soluţia adecvată” la paradoxul mincinosului? Sau la paradoxul lui Cantor? Există o „soluţie adecvată” a fiecărui paradox în parte? Sau una pentru toate paradoxurile? Dacă paradoxurile trebuie neapărat eliminate, cum recomandă concepţia paralogistică, soluţiile adecvate ar trebui să ducă la un astfel de rezultat, ele sunt soluţii efective şi nu simple explicaţii teoretice.

Deşi revine asupra problemei (vezi paragraful 4.10 *Sinteză asupra metodelor de rezolvare*, p. 187–197), Enescu nu duce lucrurile până la capăt în sensul identificării unei astfel de „soluţii adecvate”. Cu toate acestea, analiza pe care el o face paradoxurilor, inclusiv prezentarea lor, este interesantă şi actuală.

Schimbările survenite în statutul logic şi filosofic al paradoxurilor se răsfrâng, cum era de aşteptat, inclusiv asupra contradicţiei. Aristotel a impus o veritabilă „ideologie” a noncontradicţiei, însă oricine va încearca să privească în adâncul concepţiei lui va simţi nevoia unor aprofundări şi reevaluări ulterioare. Acestea privesc inclusiv conceptul de contradicţie.

Nu pot încheia aceste consideraţii fără a sublinia şi un alt aspect – capacitatea de adaptare şi evoluţie a paradoxurilor. Pe măsură ce unele paradoxuri mai vechi sunt actualizate, noi paradoxuri îşi fac loc şi nu doar în logică şi în matematică, ci în toate domeniile. Semn că nu doar cunoaşterea, ci întreaga noastră existenţă stă sub semnul paradoxului. Un adevăr pe care nu încetăm să-l descoperim şi, descoperindu-l, nu încetăm să ne mirăm.

BIBLIOGRAFIE

Aristotel, *Respingerile sofistice*, în *Organon* IV, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

Barwise, J., Etchemendy, J., *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, New Zork, Oxford, 1987.

Clark, M., *Paradoxes From A to Z* (second edition), Routledge, London and New York, 2007.

Cook, R.T., *Paradoxes*, Polity Press (Key Concepts in Philosophy Series), Cambridge, 2013.

Copi, I.M., Cohen, C., *Introduction to Logic* (11th ed.), Prentice Hall of India, New Delhi – 110 001, 2006.

Curry, H.B., *The Paradox of Kleene and Rosser*, Transactions of The American Mathematical Society, Vol. 50, No. 3 (Nov., 1941), pp. 451–516.

Curry, H.B., *The Inconsistency of Certain Formal Logics*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 7. No. 3 (Sep. 1942), p. 115–117.

[25] *Ibidem*, p. 148.

Enescu, Gh., *Teoria sistemelor logice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976.

Enescu, Gh., Târnoveanu, M. (ed.), *Logică şi Filozofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.

Enescu, Gh., *Teoria sistemelor logice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976.

Enescu, Gh., *Paradoxuri, Sofisme, Aporii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003.

Gödel, K., *On Formally Undecidable Propositions of Principia Math*. *and Related Systems* I, în J. von Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*, Harvard, 1967.

Hamblin, C.L., *Fallacies*, Methuen & Co Ltd, London, 1970.

Kant, I., *Logica* generală (trad. Al. Surdu), Edtitura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

Kleene, St. C., *Introduction to Metamathematics*, Wolters-Noordhoff Publisshing-Gronningen, North-Holland Publishing Company, Amsterdam London, sixth reprint 1971.

Kleene, St.C., *Matemathical Logic*, Dover Publications Inc., Mineola New York, 1967 (retipărire 2002).

Lucica, I., *Logica* vol. I., Editura Tehnică, Bucureşti, 2008.

Lucica, I., *Paradoxurile şi metoda raţionamentului diagonal*, Revista de Filosofie Nr. 1/2015.

Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic* (fourth edition), Chapman & Hall/CRC, 1997.

Poincaré, *Ştiinţă şi ipoteză*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

Rescher, N., *Paradoxes*. *Their Roots*, *Range and Resolution*, Open Court, Chicago and La Salle, Illinois, 2001.

Russell, B., *Mathematical Logic as Based on The Theory of Types*, în B. Russell, *Logic and Knowledge*. *Essays* 1901–1950, ed. by Robert Ch. Marsh, London George Allen & Unwin LTD, New York The MacMillan Company, fourh impression 1968, pp. 57–103.

Sainsbury, R.M., *Paradoxes* (second edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Simons, K., *Universality and the Liar*. *An Essays on Truth and the Diagonal Argument*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Whitehead, A.N., Russell, B., *Principia Mathematica to* ∗56, Cambridge at the University Press, second edition, reprinted 1973.