CONCEPȚIA LUI BROUWER DESPRE MATEMATICĂ DIN PERSPECTIVA UNEI ANALIZE FILOSOFICE A INTUIȚIONISMULUI SĂU

VIOREL VIZUREANU
Institutul de Filosofie şi Psihologie „Constantin Rădulescu-Motru"
al Academiei Române Universitatea din Bucureşti

Brouwer's concept of mathematics from the perspective of a philosophical analysis of his intuitionism. This paper continues one of our previous articles in which we first tried to identify what we have called the hermeneutical levels, which configurate the inner structure of L.E.J. Brouwer's original intuitionistic theory. We further analyzed the first two of these levels (the perspectives on communication and on language), trying to show how other parts of Brouwer's intuitionism are deeply rooted in elements highlighted here. In the present paper we focus ourselves at large on the next hermeneutical layer, offered by Brouwer's perspective on mathematics, highlighting the main features of intuitionistic mathematics, starting from several of his texts. This means that we also find on this occasion the differences between this peculiar kind of mathematics and the classical one, all in a philosophical context of analysis.

Keywords: Brouwer, intuitionism, mathematics, constructivism.

INTRODUCERE

Într-un studiu publicat anterior[1], am încercat, pe de o parte, să oferim o structură de interpretare a concepției filosofice a matematicianului intuiționist L.E.J. Brouwer, identificând ceea ce am numit paliere de analiză, menite a oferi o privire „organică", totalizatoare asupra acesteia. Astfel, considerăm că putem să vorbim în cazul intuiționismului lui Brouwer despre „straturi hermeneutice" constituite prin:

– raportarea față de comunicare interumană în general;
– raportarea față de limbaj;
– raportarea față de ştiință şi matematică;
– raportarea față de logică în întregul ei;
– raportarea față de logica matematică;

[1] A se vedea articolul nostru consacrat intuiționismului lui Brouwer din *Studii de istorie a filosofiei universale*, vol. XXIV, 2016.

– raportarea față de aplicarea particulară în matematică a anumitor principii / legi (logice);

– raportarea față de logica intuiționistă (şi față de formalizarea în genere a intuiționismului).

La acestea am adăugat şi poziția lui Brouwer în ceea ce priveşte subiectivitatea în sens filosofic, una configurată de el preponderent epistemologic prin intermediul noțiunii de *subiect creator*, apreciind cu acelaşi prilej că această poziție a sa oarecum „strânge” laolaltă anumite aspecte esențiale expuse pe palierele menționate mai sus.

Pe de altă parte, tot cu acelaşi prilej am abordat primele două paliere, cele consacrate comunicării şi limbajului, încercând să indicăm o configurație de bază în ceea ce le priveşte.

În articolul de față vom continua prezentarea tabloului filosofic implicat de intuiționismul lui Brouwer, abordând cel de-al treilea palier menționat în cadrele fixate de studiul nostru anterior. Ne vom concentra cu acest prilej asupra acelor elemente mai puțin dezbătute în literatura de specialitate. Şi această caracteristică – pe lângă cadrul de bază al analizei întreprinse de noi ce se poate constitui într-un, sperăm, eficient instrument hermeneutic în sine – poate constitui unul dintre punctele distinctive ale prezentei abordări.

BROUWER DESPRE ŞTIINȚĂ ŞI MATEMATICĂ OBSERVAȚII GENERALE

Ca fenomen ce ține de istoria umanității, în sens filogenetic, ştiința este în concepția lui Brouwer „floarea cea de pe urmă şi osificarea culturii”[2]. Ea reprezintă un sistem conceptual care contribuie concomitent la ținerea laolaltă eficientă a oamenilor şi la împiedicarea comunicării reale între aceştia.

În fapt, se obține astfel o securizare a tot ceea ce se petrece în viața omului în sensul unei „externalizări” continue a conținuturilor trăite, prin care omul este ținut departe de sinele său profund: „Ştiința plasează tot ceea ce este perceput în afara sinelui, într-o lume a percepției independentă de sine; legătura cu sinele, singura sa sursă şi ghid, este astfel pierdută. Aceasta clădeşte apoi un substrat matematico-logic care este complet străin vieții, care este o iluzie, având acelaşi efect în viața oamenilor precum Turnul Babel cu a sa confuzie a limbilor”[3].

Tehnic vorbind, Heyting arată că pentru Brouwer *ştiința* în genere este bazată pe secvențe (serii) cauzale. Inițial este o armă dezvoltată de om în lupta pentru supraviețuire, doar mult mai târziu apare ceea ce s-ar putea numi ideea de ştiință

[2] L.E.J. Brouwer, „Life, Art, and Mysticism [Leven, Kunst, en Mystiek]”, 1905, trad. de W. P. van Stigt, în Barry Stocker (ed.), *Post-Analytic* Tractatus, Ashgate, Aldershot, England / Burlington, USA, 2004, p. 11. A se nota că Brouwer nu vede o soluție la această situație acolo unde o găseau majoritatea contemporanilor săi. Pentru el, „arta şi religia în această lume reprezintă numai nişte uriaşe maşinării de anesteziere (*grand morphine industries*) [a omului]” (*ibidem*, p. 12).

[3] *Ibidem*, p. 27.

pură. Plecând de la regularităţi sesizate la nivel perceptual, trecând prin dezvoltări şi idealizări matematice (care nu corespund decât în parte unor realităţi măsurate concret, menite fiind să ofere anticipaţii cu privire la experienţa noastră), se ajunge la sisteme matematice şi legităţi ale naturii[4].

Deoarece matematica este atât o ştiinţă, cât şi un limbaj, trebuie trecut la o nouă concepţie asupra matematicii care să o facă acceptabilă inclusiv din punct de vedere etic. Astfel, apreciază Franchella, matematica va trebui să respecte două condiţii de bază: 1) să se identifice cu o activitate mentală care să nu implice limbajul[5] şi 2) să se facă acest lucru fără scopul de a o aplica în realitatea concretă. În această activitate se va trece de la o evidenţă la alta, ceea ce nu necesită *aplicarea* (intervenţia „din exterior") a vreunei reguli – este necesar doar să „vezi", să „observi"[6]. Evident, „prin dezvoltarea internă a matematicii, Brouwer nu putea păstra nici o teorie a entităţilor matematice independente de om şi nici o teorie clasică a adevărului ca referindu-se la ceva exterior omului"[7].

Limbajele, oricare ar fi acestea (sau limbajul în sine, dacă se doreşte), sunt îndepărtate de Brouwer de esenţa activităţii matematicianului, de obţinerea sau de crearea de noi adevăruri; singurul lor rol este acela de ajutor acordat memoriei matematicianului sau de a indica oamenilor cum să ajungă la aceleaşi construcţii matematice: „în construcţia acestor mulţimi [matematice de unităţi] nici limbajul obişnuit şi nici vreun limbaj simbolic nu pot avea alt rol decât acela de a servi drept ajutor nonmatematic (*as a nonmathematical auxiliary*) pentru a asista memoria matematicianului sau pentru a permite altor indivizi să construiască aceeaşi mulţime"[8].

De observat că această atitudine critică vizează însăşi matematica, în calitatea acesteia de disciplină dezvoltată istoric – într-un mod necritic sau nereflectat – în strânsă legătură / dependenţă cu limbajul sau limbajele, fie ele ordinare sau tehnice. Din această perspectivă, matematica în întregul ei devine ţinta criticii lui Brouwer, nu doar cea aflată în conivenţă cu logicismul sau formalismul[9]. Matematica însăşi – ca disciplină „oficială" sau „instituţionalizată" cultural – trebuie reconstruită din temelii.

Pe de altă parte, din punct de vedere tehnic-intuiţionist, „[m]atematica apare atunci când doi-tatea (*two-ity*) creată de o mişcare a timpului este deposedată de

[4] A. Heyting, „L.E.J. Brouwer", în Raymond Klibansky (ed.), *Contemporary Philosophy. A Survey*, vol. I: *Logic and Foundations of Mathematics*, La Nuova Italia Editura, Firenze, 1968, p. 310. Pentru o prezentare mai amplă a acestui fundal pe care se constituie ştiinţa / matematica, a se vedea articolul nostru amintit anterior.

[5] Într-o altă formulare a aceluiaşi autor: „matematica trebuie dezvoltată în intelect (şi nu „pe hârtie", fapt pentru care [Brouwer – n.n.] îi critică pe formalişti)" (Miriam Franchella, „Philosophies of Intuitionism: Why We Need Them", *Teorema*, vol. XXVI (1), 2007, pp. 73–82, p. 74).

[6] Miriam Franchella, „L.E.J. Brouwer: Towards Intuitionistic Logic", *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 305.

[7] M. Franchella, „Philosophies of Intuitionism…", p. 74.

[8] L.E.J. Brouwer, „Intuitionism and Formalism", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 37 (1) (articol publicat electronic la 21 decembrie, 1999, reprodus din *Bull. Amer. Math. Soc.* 20, 1913, pp. 81–96), p. 58.

[9] Vezi M. Franchella, „Philosophies of Intuitionism…".

orice calitate de către subiect şi când forma goală rămasă drept substrat comun al tuturor doi-tăţilor (*two-ities*), ca intuiţie de bază a matematicii, este abandonată unei dezvoltări (*unfolding*) nelimitate, creând [astfel] noi entităţi matematice în forma unor *şiruri infinite, înaintând predeterminat sau mai mult ori mai puţin liber*, a entităţilor matematice dobândite anterior, şi în forma *speciilor matematice*, i.e. a proprietăţilor presupuse pentru entităţi matematice dobândite anterior şi care satisfac condiţia că dacă sunt realizate pentru o anumită entitate matematică, ele sunt realizate şi pentru toate entităţile matematice care au fost definite ca fiind egale cu aceasta"[10].

TRĂSĂTURILE UNEI MATEMATICI INTUIŢIONISTE DIN PERSPECTIVA UNEI ANALIZE FILOSOFICE

Ca rezultat al unei analize întreprinse atât textelor lui Brouwer consacrate prezentării matematicii intuiţioniste, cât şi comentariilor mai multor interpreţi dedicate subiectului în cauză, apreciem că, dintr-o perspectivă filosofică, trăsăturile acestei matematici sunt următoarele:

a) Auto-justificarea / auto-legitimarea matematicii intuiţioniste

Aceasta înseamnă şi independenţa totală, absolută a matematicii faţă de orice altă manifestare a spiritului omenesc[11]. De altfel, s-a afirmat că teza de doctorat a lui Brouwer din 1907, *Despre fundamentele matematicii* (*Over de Grondslagen der Wiskunde*), a reprezentat pentru acesta „declaraţia de independenţă a matematicii faţă de ştiinţă şi logică deopotrivă şi lansarea propriei sale filosofii alternative, în care mintea individului uman reprezintă unicul agent şi locul de desfăşurare ale activităţii matematice"[12]. Astfel, cu acest prilej Brouwer afirmă că „matematica este independentă de aşa-numitele *legi logice* (legi ale raţionării sau ale gândirii umane)"[13], altfel spus este independentă de cele ce sunt considerate a fi cele mai elementare „reglementări" ale cunoaşterii, apreciate îndeobşte a fi manifeste în orice cunoaştere posibilă[14].

Matematica clasică deschisă necritic spre logicism a dus la apariţia, iar apoi impunerea problemei abordării fundamentelor sale, a „crizei" acestora, pentru a

[10] L.E.J. Brouwer, „Consciousness, Philosophy, and Mathematics" (1948), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, p. 482.

[11] Fără a insista asupra acestui aspect, să notăm că regăsim aici, în fond, un alt tip de afirmare a cunoaşterii moderne, a gestului de – o numim noi – „purificare cognitivă (a cunoaşterii)". Vezi aici demersul cartezian expus în prima dintre *Regulile* sale pentru îndrumarea intelectului. Aici, fireşte, sub alte auspicii, restrânse în cazul lui Brouwer doar la registrul matematic. Mai mult, criza fundamentelor, în sine, este un fenomen tipic modernităţii.

[12] Walter P. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam, 1990, p. VIII.

[13] L.E.J. Brouwer, „On the Foundations of Mathematics [Over de Grondslagen der Wiskunde]" (1907), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. I, p. 75.

[14] Aceste legi sunt fie respinse de către Brouwer (terţul exclus, dubla negaţie, reducerea la absurd), fie resemnificate matematic în însăşi esenţa lor.

putea fi justificată pretenţia sa de cunoaştere (în totalitatea sa), de a putea scăpa de amestecul inextricabil de cunoaştere şi falsă cunoaştere, de a găsi astfel sursele acestui amestec. Ea a pus deci problema unei reflecţii teoretice suplimentare, a unei abordări / intervenţii de filosofie a matematicii aşa-zicând „din exterior". Or, după cum pertinent observă Dummett, caracterul exclusiv constructiv al intuiţionismului asigură practic totodată şi „justificarea" epistemologică şi ontologică a unei asemenea matematici, întrucât construcţia directă însăşi a afirmaţiei matematice reprezintă proba irefutabilă a existenţei matematice în cauză: „[i]ntuiţionismul priveşte faptul că matematica clasică se vădea că avea nevoie de o justificare nu ca pe o provocare de a construi – în mod direct sau indirect – o astfel de justificare, ci ca pe un semn că ceva nu era în regulă cu aceasta. Matematica, din punct de vedere intuiţionist, atunci când este întreprinsă în mod corect, nu are nevoie [suplimentar] de nicio justificare din afară, de vreun un sprijin din jur sau de vreo fundaţie de dedesubt: ea ar purta cu sine (*on its face*) propria sa justificare"[15]. Matematica intuiţionistă nu mai are nevoie de o autoritate epistemică superioară, de un „exterior al său" pentru a căpăta legitimitate, ea nu îşi primeşte / nu îşi aşteaptă justificarea dintr-un act cognitiv suplimentar, secund temporal şi (epistemo)logic.

b) Trăsătura anterioară deschide spre **incomunicabilitate şi solipsism**, spre **o auto-fundare absolută a matematicii**, în fapt spre o fundare a acesteia în însăşi structura funcţională a minţii (conştiinţei) umane[16]

Atât conştiinţa, cât şi matematica se nasc în procesul de aprehendare a multiplicităţii prin fixarea de secvenţe cauzale în cadre formale temporale.

Surprinzător, discuţia se poate dezvolta în acest punct dinspre epistemologie spre misticism. După cum observă Dirk van Dalen, pentru Brouwer „[m]atematica se justifică [singură] pe sine, nu necesită nici un alt fundament mai adânc decât misticismul moral"[17]. Misticismul lui Brouwer nu este atât unul „exterior", care se adaugă sau acompaniază viziunea sa despre matematică (în ciuda trimiterilor sale din tinereţe la Meister Eckhart, Jakob Boehme sau Baghavad Gita), cât unul care survine din însăşi maniera în care el înţelege matematica din perspectiva esenţei celei mai intime a activităţii acesteia.

Mai mult, misticismul acesta nu este unul al entităţilor matematice în sine, legat de frumuseţea, puritatea sau perfecţiunea lor, legat de divinul exprimat prin matematică (ca într-o viziune inspirată de platonism), ci de însăşi activitatea matematicianului, împinsă spre a recupera cu adevărat autenticul din matematică, spre singurătate (autenticitate) şi non-comunicare. Este, dacă se vrea, un „misticism epistemologic", nu unul „ontologic".

[15] Michael Dummett, *Elements of Intuitionism*, sec. ed., Clarendon Press, Oxford, 2000, p. 2.

[16] Revenim mai jos asupra acestei afirmaţii.

[17] Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher. How Mathematics Is Rooted in Life*, Springer, London, 2013, p. 81.

c) Matematica este în mod exclusiv *legată, dependentă de om*; mai mult, **activitatea matematică se identifică cu comportamen*tul* uman de bază, originar**

Am văzut deja că matematica nu este pur şi simplu o ştiinţă – trebuie reamintite aici şi reticenţele lui Brouwer faţă de ceea ce noi numim îndeobşte ştiinţă menţionate anterior –, ci este în mod esenţial expresia legăturii fiinţei umane cu realitatea, a deschiderii necesare a sinelui spre aceasta. Pentru Brouwer, înainte de abstractizările matematicii regăsim, mai originar, ca fenomen antropologic, un „mod matematic de a vedea [lucrurile] (*mathematical viewing*)". Acesta este „o atitudine pe care omul a adoptat-o în lupta sa pentru existenţă şi care se constituie în două etape, cea în care omul devine conştient de timp şi cea a atenţiei cauzale"[18].

Am putea chiar afirma că, la Brouwer, matematica conţine în esenţa sa cea mai intimă mecanismul sublimat (abstractizat) de adaptare – dacă nu de armonizare – al fiinţei umane la realitatea înconjurătoare. Într-un fel, putem înţelege intuiţionismul lui Brouwer ca o încercare de recuperare teoretică a acestei – o numim noi – „situaţii originare şi fundamentale a matematicii", de recuperare a unei situări fundamentale a matematicului în viaţă. Matematica nu este în mod originar o „ştiinţă" (cum am constatat deja), ci expresia unui comportament uman vital, a unei reacţii „genetice" la mediul înconjurător. Dincolo de mentalismul transcendental de factură kantiană al lui Brouwer, ce trimite la un subiect cunoscător „în genere", an-istoric, regăsim o schiţă a unui plan „filogenetic", apropiat de schema unei evoluţii istorice de inspiraţie darwinistă[19].

De fapt, ne putem gândi că pentru Brouwer, ceea ce am numi intimitatea absolută, imanentă, a matematicii[20] manifestă totodată – prin însuşi caracterul său mobil[21], de desfăşurare temporală – nu doar subiectivitatea imanentă, ci şi deschiderea fundamentală a fiinţei umane individuale spre exterior. Doi-tatea brouweriană amintită, fondatoare pentru matematică, reprezintă nu doar o funcţionare internă sau *per se* a minţii umane, marca izolării sale funciare, ci şi, concomitent, gestul său de adaptare la exterior, de sesizare formală a acestuia, de aducere a acestuia la nivelul „atenţiei", şi, totodată, de expunere faţă de mediul înconjurător a subiectului, ceea ce înseamnă şi o „integrare" în vastitatea proteică a acestuia.

[18] L.E.J. Brouwer, „Willen, Weten, Spreken" (1933), apud W.P. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, p. 418.

[19] Fireşte, observaţia că intuiţionismul prin constructivismul mental afirmat de Brouwer este mai apropiat de noţiunea de evoluţie decât poziţia de tip platonist (Jan M. Smith, „Evolution and Logic", în P. Dybjer, S. Lindström, E. Palmgren, G. Sundholm (eds.), *Epistemology versus Ontology. Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*, Springer, Dordrecht, 2012, p. 134) ţine de domeniul evidenţei (şi poate fi valabilă şi pentru intuiţionism în genere). Aici ne referim însă la aspectul „filogenetic" subliniat de noi anterior. În sens strict pozitivist, apropierea dintre Brouwer şi Darwin a mai fost făcută: „semantica brouweriană se potriveşte (*dovetails*) cu realitatea neuroanatomică şi cu comportamentul observabil al categoriilor de semnificaţie (*meaning*) [privite] ca unităţi în procesul darwinian de selecţie a grupurilor neuronale" (George van Driem, „The Language Organism. The Leiden theory of language evolution", p. 1).

[20] Pusă în evidenţă de majoritatea comentatorilor lui Brouwer.

[21] Asupra căruia vom reveni mai jos.

Într-un sens asemănător, legat de primul aspect amintit anterior, se pronunţă şi Fraser: „caracterul absolut primordial al aritmeticii este esenţial pentru Brouwer. Aritmetica, aşa cum Brouwer o înţelege, este în mod virtual co-substanţială cu însăşi existenţa subiectului uman”. El observă şi că Brouwer, în anumite texte „mai speculative” ale sale, insistă că, „anterior aprehendării doi-tăţii (*two-ity*) în care este originată matematica, subiectul [uman] ca atare nu este configurat încă”[22].

d) Caracterul mental al matematicii

Spre deosebire de o viziune de tip platonist, matematica reprezintă la Brouwer însăşi funcţionarea de bază a minţii umane (în sens restrâns intelectual de această dată). Ea nu trimite deci la un referenţial ontologic exterior. Exprimarea lui Brouwer este extrem de clară în acest punct: „din punct de vedere intuiţionist (…) *nu există* adevăruri matematice în afara minţii omeneşti”[23]. Într-un fel, adevărurile matematicii nu sunt nici înnăscute, nici dobândite, ci sunt – într-o exprimare paradoxală care ne aparţine – rezultatele activităţii înnăscute de dobândire (prin construire) a noului.

După cum observă Bridges, „pentru Brouwer matematica este intrinsecă intelectului omenesc, precedând limbajul, logica şi experienţa”[24]. Am putea adăuga că, pentru Brouwer, matematica este o manifestare *originară* a minţii omeneşti – că aceasta este „matematizantă”, aşa cum pentru Hobbes era calculatorie[25] –, ireductibilă la nimic altceva, dacă nu chiar manifestarea primară şi unică a acesteia, cel puţin în dimensiunea sa „intelectuală”[26].

Cum am văzut deja, acest „mentalism” trebuie să fie înţeles într-un sens mult mai profund, nu doar simplu epistemologic: matematica descrie structura primară dinamică şi organizatorică a minţii umane nu doar în ceea ce s-ar putea numi în sens strict cunoaştere, ci, mai mult, în tot ceea ce înseamnă adaptare la (sau inserare în) realitate a fiinţei umane. Acest primat absolut al matematicului faţă de orice altceva (comunicare, limbaj, logică, societate) este ceea ce îi va permite în permanenţă şi în mod fundamental lui Brouwer să indice spre intuiţionism ca înspre o teorie şi o practică cognitivă absolut certă.

Altfel spus, matematica înţeleasă intuiţionist nu este un *produs* al intelectului, un intelect care să fie „altfel”, care să aibă o natură diferită şi care să se ocupe la un

[22] Zachary Fraser, „The Law of the Subject: Alain Badiou, Luitzen Brouwer and the Kripkean Analyses of Forcing and the Heyting Calculus”, *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy*, vol. 2, no. 1–2, 2006, p. 100.

[23] Dirk van Dalen (editor), *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981, p. 6.

[24] Douglas S. Bridges, „Reality and Virtual Reality in Mathematics”, 2006, p. 5.

[25] Vezi legat de caracterul esenţial computaţional al raţionării umane la Hobbes studiul lui Guido Gherardi, „La matematica della mente: il pensiero come calcolo in Hobbes e Boole”, în *Discipline Filosofiche*, vol XXI, nr. 1, 2011, pp. 153–177.

[26] În definitiv, am putea să acceptăm că orice recunoaştere drept fundamentală a categoriilor Unu / Multiplu, din perspectiva „secvenţialităţii” funcţionării mentale, implică un caracter matematizant – cel puţin aritmetizant.

moment *ulterior* cu matematica, aşa cum se va ocupa şi cu alte tipuri de cunoaştere, ci priveşte în însăşi esenţa sa exact maniera cea mai profundă în care acesta funcţionează; altfel spus, matematica înfăţişează (descrie, se identifică cu) ceea ce am putea numi „punctul zero al cunoaşterii", „desfăşurarea esenţială a activităţii înseşi a minţii". După cum observă Placek, „[î]n filosofia lui Brouwer, o precondiţie necesară (…) constă în a avea o perspectivă matematică asupra senzaţiilor, i.e. de a le aranja pe acestea într-o anumită structură matematică. Limbajul este utilizat ulterior pentru a vorbi despre constructe matematice care reprezintă agregări de senzaţii"[27].

În finalul prezentării acestei trăsături am dori să abordăm pe scurt o discuţie care poate fi făcută, fireşte, în legătură cu întreaga poziţie intuiţionistă (în măsura în care acceptăm că există aşa ceva) sau, oricum, cu „dezvoltările" – mai mult sau mai puţin fidele sau libere ale – concepţiei brouweriene. Este vorba de rolul limbajului în matematica înţeleasă intuiţionist. Am văzut că Brouwer consideră că matematica (construcţiile acesteia) trebuie să fie înţeleasă în afara limbajului, pe scurt, că matematica este – pentru a folosi expresia engleză – „languagelessness" (nonlingvistică, nonverbală). Limbajul este astfel eliminat ca şi mediu în care se poate vădi (sau dovedi) efectivitatea construcţiei realizate de matematician; doar introspecţia reprezintă „solul" care poate „hrăni" astfel de „vietăţi" matematice (într-o exprimare liberă care ne aparţine).

Totuşi, după cum observă Troelstra[28], este evident că în matematica intuiţionistă de astăzi această dimensiune (fundamentală pentru Brouwer) „nu intră în justificarea principiilor şi a presupoziţiilor de existenţă pentru obiectele matematice – iar aceasta nici măcar în teoria matematicianului idealizat auto-reflexiv. În acelaşi timp, aceasta nu înseamnă că putem asuma consistent că orice obiect considerat în matematica intuiţionistă poate întotdeauna să fie în mod adecvat descris prin intermediul limbajului – acest lucru este fals, de exemplu, pentru un şir individual total aleatoriu (*lawless*)".

Troelstra adaugă apoi: „în lumina celor precedente, prefer nici să nu fac din «nonverbalitate» o dogmă (un principiu de bază) al matematicii intuiţioniste şi nici să îmbrăţişez principiul opus: acela că toate construcţiile [matematicii] *trebuie* să poată primi o descriere lingvistică. Nu putem, în practică, să constituim teoriile noastre intuiţioniste fără ajutorul limbajului – aceasta poate cauza divergenţe între tipul de matematică nonverbală ideal postulată şi construcţia noastră efectivă [actuală] a matematicii intuiţioniste, dar nu avem niciun mijloc de a testa această divergenţă (*we have no means to test for divergence*)! Bernays (1970) a descris matematica drept ştiinţa structurilor idealizate; în construcţia teoriilor despre realitatea

[27] Tomasz Placek, *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity. A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*, Springer-Science+Business Media, B.V., Dordrecht, 1999, p. 63.

[28] A.S. Troelstra, „Remarks on Intuitionism and the Philosophy of Mathematics" (revised edition), *ITLI Prepublication Series* X-90-01, University of Amsterdam, 1990, p. 4. În cele ce urmează, vom cita pe larg din această lucrare a lui Trolestra şi vom oferi comentariile noastre, apreciind că se găseşte aici prezentat extrem de clar unul din punctele-cheie ale discuţiei despre intuiţionism în genere.

externă, corespondenţa dintre teorie şi realitate este una schematică. Pe de o parte, descrierea teoretică nu surprinde toate aspectele realităţii, dar, pe de altă parte, perfecţiunea schemei este doar aproximat de către realitate. (...) Intuiţionismul pare să aibă o relaţie similară cu intuiţiile şi cu puterile noastre cognitive efective – este o schematizare a acestor intuiţii şi puteri. Cu alte cuvinte, experienţa matematică joacă aici un rol comparabil cu cel al realităţii fizice în construcţia unei teorii fizice."[29]

e) Caracterul constructiv al matematicii

Există în intuiţionism o necesară „constructibilitate" a oricărui obiect matematic. Aceasta înseamnă totodată un caracter pur „afirmativ" al matematicii – construcţia reprezintă pozitivitatea absolută a prezenţei, una de factură imanentă.

Această pozitivitate absolută se regăseşte şi în poziţia intuiţioniştilor faţă de negaţie în procesul de argumentare – vezi şi încercările acestora de „destituire" a negaţiei, de a crea o matematică lipsită de negaţie, ca la G.F.C. Griss[30].

Un aspect important – şi paradoxal totodată – derivat din acest caracter pur constructiv al matematicii la Brouwer îl constituie raportul aparte care se stabileşte între matematică, timp şi adevăr. După cum observă Fraser, „o trăsătură interesantă a noţiunii intuiţioniste de timp logic (dacă o putem numi astfel) o constituie faptul că dacă adevărul este ceva ce trebuie produs prin activitatea în timp a subiectului uman, atunci acest adevăr, odată produs, este apreciat ca fiind etern valid. Limbajul matematicii intuiţioniste, fiind opus oricărui metalimbaj prin care ne-am putea dori să îl analizăm, este prin urmare «a-temporalizat (*tenseless*)»[31], în ciuda temporalităţii ireductibile ale procedurilor care contribuie la constituirea adevărurilor sale. (...) Admiţând ca enunţuri matematice doar pe acelea care declară existenţa unei proceduri constructive, intuiţionismul evită să se confrunte cu contradicţii între propoziţiile a-temporalizate (*tenseless*) privind evenimentele condiţionate temporal. În acest fel, intuiţionismul produce o logică a adevărurilor care sunt concomitent eterne şi create"[32].

Există, probabil, două etape importante ale constructivismului în matematica lui Brouwer. În prima regăsim ceea ce am putea numi cerinţa generală a constructivităţii efective în matematică. Deşi în această primă perioadă întâlnim „ideile şi instrumentele pentru o matematică nemijlocit (*straightforward*) constructivă", nu e

[29] *Ibidem*. Troelstra se referă în citat la P. Bernays, „Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen", *Dialectica* 24, pp. 53–66.

[30] Vladimir I. Arshinov şi Vjacheslav E. Voitsekhovich, „Synergetic Knowledge: Between the Network and the Principles", în Vladimir Arshinov şi Christian Fuchs (eds.), *Causality, Emergence, Self-Organisation*, NIA-Priroda, Moscow, pp. 182–194, p. 189. Pentru aceşti autori, „constructibilitatea" menţionată este subliniată şi de cei pe care ei îi numesc pre-constructivişti, precum H. Poincaré, H. Weyl sau A.A. Markov jr.

[31] Am folosit în traducerea noastră sugestia oferită de Victor Popescu într-un articol al său, unde justifică această opţiune prin faptul că „atemporal" ar traduce chiar termenul identic din engleză („Teoria russelliană a timpului: o alternativă la teoriile A şi B", *Revista de filosofie*, vol. LXIII, nr. 1, 2016, p. 78, nota 8).

[32] Z. Fraser, *op. cit.*, pp. 113, 114.

mai puţin adevărat că tot acum percepţia larg răspândită este că „programul lui Brouwer era unul pur negativ, identificându-se cu interzicerea anumitor principii (în principal, cel al terţului exclus)”. Practic, se putea afirma că matematica intuiţionistă „are puţine de arătat, cu excepţia câtorva noţiuni noi”[33].

Cea de-a doua etapă presupune regândirea profund constructivistă a anumitor categorii fundamentale ale matematicii, revoluţionarea acesteia. Cronologic vorbind, putem situa începutul acestei perioade în 1924, odată cu publicarea studiului său „O dovadă că toate funcţiile complete sunt uniform continue” – „această lucrare, precum şi îmbunătăţirile ei ulterioare, au conţinut descoperirea majoră a noului intuiţionism”, una care îi permitea lui Brouwer să înfăţişeze cu adevărat intuiţionismul lumii matematice ca fiind o concepţie distinctă de cea a matematicii clasice. Acestei lucrări îi urmează curând teza unui doctorand de-ai săi (M. Belinfante), consacrată unei teorii constructive a seriilor, la care se adaugă un lung şir de contribuţii din aceeaşi arie[34].

Această constructibilitate care transformă profund esenţa unor entităţi matematice fundamentale, cu un exemplu clar în „şirurile cu desfăşurare / dezvoltare liberă (*freely becoming sequences*)”, a fost interpretată şi ca o veritabilă „eliberare” a obiectului matematic [35].

f) Caracterul dinamic al matematicii, matematica înţeleasă în mod fundamental ca activitate a subiectului

Cele două aspecte sunt distincte, dar strâns legate între ele: dacă matematica este (nu poate fi garantată în pretenţia ei de adevăr decât drept) construcţie, o construcţie continuă, permanentă, atunci şi cel care „face” matematică trebuie să fie un subiect prin excelenţă activ, cu o interioritate nesupusă regulilor impuse din exterior prin intermediul limbajului. Fireşte, nu trebuie să dezvoltăm, şi reciproca este adevărată. Cineva ar putea afirma că avem aici de fapt cele două feţe ale unei unice monede. Subiect activ, construcţie matematică dinamică – aceşti termeni conturează oarecum o unică realitate, cu deschideri hermeneutice multiple: ontologice, antropologice, epistemologice şi chiar etice.

Trebuie deosebit şi în acest context între matematica intuitivă (intuiţionistă) şi matematica aşa cum o cunoaştem din tratatele „obişnuite” existente, altfel spus între matematica „originară” (termenul ne aparţine) şi cea de ordinul doi. Regăsim şi cu acest prilej problema raportului dintre matematică şi ştiinţă. Brouwer, în teza sa de doctorat din 1907, aprecia că „[s]tricto sensu vorbind, construcţia matematicii intuitive în sine este o acţiune şi nu o ştiinţă. Ea devine o ştiinţă, i.e. o totalitate de secvenţe cauzale, repetabile în timp, într-o matematică de ordinul doi, care constă în luare în considerare matematică a matematicii sau a limbajului matematicii”[36].

[33] D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher…*, p. 366.
[34] *Ibidem*.
[35] V.I. Arshinov şi V.E. Voitsekhovich, *op. cit.*, p. 189.
[36] L.E.J. Brouwer, „On the Foundations of Mathematics”, p. 61.

Acest dinamism aparte al matematicii intuiţioniste are unele deschideri aparte, care, de altfel, se constituie şi în răspunsuri oferite celor care au apreciat, de-a lungul timpului, că acest demers reprezintă o întreprindere sterilă din punct de vedere cognitiv. Astfel, Dirk van Dalen a observat că – dincolo de semnificaţia pentru filosofie şi matematică – intuiţionismul a influenţat ştiinţa informaticii (*computer science*) în două direcţii distincte: cea algoritmică (începând cu Kleene în 1945) şi cea semantică (de la mijlocul anilor 1930)[37]. În acest context, el îl aprobă pe J.-Y. Girard[38], susţinând că „matematicienii au tendinţa să considere entităţile matematice ca fiind rigide şi eterne, în vreme ce ştiinţa informaticii a introdus în această privinţă dinamică şi structuri ce posedă stări. Dacă, fără îndoială, aşa stau lucrurile în ceea ce priveşte matematica clasică, care este încremenită (*frozen*) de la bun început prin aceea că îmbrăţişează principiul terţului exclus, matematica intuiţionistă este mult mai modestă în pretenţiile sale vizând eternitatea. Insistenţa explicită asupra infinităţii potenţiale, împreună cu adoptarea obiectelor incomplete (în timp!), conferă intuiţionismului o trăsătură dinamică, pentru care acesta nu trebuie să introducă un parametru temporal explicit, precum în matematica clasică. Aceasta poate servi drept explicaţie parţială pentru o anumită popularitate a metodelor intuiţioniste în ştiinţa informaticii”[39].

Caracterul *dinamic* al matematicii – precum şi a subiectului uman ce o performează – la Brouwer este menţionat, apreciativ, şi de Abraham Robinson, însă el vede aici un punct comun între intuiţionismul acestuia şi matematica non-intuiţionistă: „intuiţionismul lui Brouwer este intim legat de concepţia sa despre matematică înţeleasă ca activitate dinamică a minţii umane şi nu ca descoperire a unui univers abstract şi imuabil”[40] – trebuie deci să fim conştienţi că printr-o astfel de diluare semantică nu facem decât să recuperăm unul din locurile comune ale modernităţii, acela a unui subiect uman prin excelenţă (dacă nu prin esenţă) activ, în cunoaştere, ca şi în comportamentul său social şi politic[41].

Cum spuneam, strâns legat de caracterul dinamic al matematicii regăsim şi ceea ce putem numi un caracter activ al subiectului cunoscător, al omului în general: „Brouwer consideră că activitatea este trăsătura centrală a omului”[42].

[37] Dirk van Dalen, „Intuitionism – Counting its Blessings”, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 3, 1996, pp. 2–3.

[38] Este vorba de articolul acestuia, „Linear Logic: A Survey”, apărut în Ph. De Groote (ed.), *The Curry-Howard Isomorphism*, Academia, Louvain, pp. 193–255.

[39] D. van Dalen, „Intuitionism – Counting its Blessings”, p. 3.

[40] Citat în Joseph Warren Dauben, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis. A Personal and Mathematical Odyssey*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995, p. 461.

[41] Fireşte, dincolo de etapele constructivismului lui Brouwer menţionate anterior (ele însele interogabile din perspectiva raportului dintre intuiţionismul matematic şi constructivismul matematic), această observaţie trebuie să devină pe viitor obiectul unei investigaţii amănunţite. Aceasta, totodată, dincolo – chiar mai mult – de clişeele vehiculate despre o „epocă” sau „curent”.

[42] V.I. Arshinov şi V.E. Voitsekhovich, *op. cit.*, p. 189. Este ceea ce permite şi apropierea matematicii de artă şi de viaţă în genere.

Aceasta înseamnă că odată cu investigarea esenţei matematicii se vor oferi „informaţii" fundamentale şi din perspectiva unei antropologii filosofice *sui generis*. Esenţa matematicii este strâns legată de esenţa omului, cercetând-o pe una ajungem la cealaltă, şi invers.

Apelând la o formulare inspirată a lui Bates care strânge laolaltă în mod sintetic caracteristicile matematicii menţionate de noi până acum, vom putea afirma că intuiţionismul lui Brouwer „nu căuta să ofere noi fundamente pentru matematică, ci încerca să găsească o nouă înţelegere a practicii [matematice], una constructivă la modul absolut (*admittedly constructive*), legitimată nu principii logice atemporale, a priori, ci care se *auto-legitimează* în calitatea sa de capacitate productivă a unei minţi umane vii, întrupate"[43].

g) Caracterul unitar-organic al matematicii

Strâns legat de caracterul prin excelenţă constructiv, întâlnim în intuiţionismul lui Brouwer şi această „uniformizare" conferită activităţii matematicianului, prin urmare şi entităţilor ce contribuiau anterior (de o manieră distinctă) la structura standard a acestei practici cognitive. Astfel, cezura obişnuită dintre obiect şi demonstraţie este anulată – după cum observă van Dalen, „pentru Brouwer demonstraţiile (*proofs*) sunt construcţii de un fel particular şi deci ele sunt părţi integrante (*part and parcel*) ale matematicii înseşi, nu o manifestare într-un alt mediu (i.e. limbajul). Demonstraţiile *sunt obiecte actuale care trebuie construite* şi asupra cărora trebuie operat (subl. ns.)"[44]. Nu avem deci obiecte matematice, pe de o parte, şi o activitate (exercitată prin intermediul limbajului) prin care aceste obiecte sunt manipulate, cu atât mai puţin în sens formalist ca semne, pe de altă parte.

Am vrea să adăugăm aici unele observaţii mai libere ale noastre în legătură cu acest punct care ni se pare unul deosebit de important. Cum am menţionat, pentru Brouwer demonstraţiile matematicii sunt ele însele obiecte matematice şi nu expresia aplicării unui limbaj – (din) exterior – entităţilor de natură matematică. Demonstraţia este deci, de data asta în proprii noştri termeni, „continuarea" (dezvoltarea, construcţia) obiectului – ar trebui să-i spunem „iniţial" sau „dat"; de fapt, dacă este să fim atenţi, avem de-a face de la bun început cu un „obiect cu problemele (potenţialităţile) sale" (un obiect „fix" nu are nicio „problemă", nu „vrea" nimic – el poate fi doar contemplat, divinizat, să zicem în maniera lui Pitagora sau Platon); este un obiect care „creşte" astfel din sine (cu ajutorul privirii

[43] David Bates, „Crisis Between the Wars: Derrida and the Origins of Undecidability", *Representations* 90, Spring 2005, p. 12.

[44] D. van Dalen, „Intuitionism – Counting its Blessings", p. 2. Trebuie să observăm cu acest prilej, după cum arată acelaşi van Dalen, că Brouwer „a introdus o noutate în matematică, una care ar fi putut să scape atenţiei contemporanilor săi, dacă Heyting şi Kolmogorov nu ar fi prezentat subiectul de o manieră sistematică" (*ibidem*). Poate chiar prea sistematică, am putea adăuga, în sensul unei intruziuni masive a logicii în prezentarea matematicii, contrar spiritului ce a animat intuiţionismul lui Brouwer.

investigatoare şi a intelectului, care reprezintă *singura* sa „sursă de hrană”; nu al limbajului, al limbii în genere, care, pentru Brouwer, nu poate să „continue”, să „crească” nimic).

Trebuie sesizat întâi că *întreaga matematică* devine astfel, la limită, un unic, vast „obiect” (o unică activitate a minţii). „Obiectele” sunt legate de toate celelalte „obiecte” prin activităţi (demonstraţii). (Aceasta se realizează însă, am fi nevoiţi să acceptăm, lăsând la o parte ori evitând fundaţionismul primelor acte alte intuiţionismului expuse de Brouwer[45]. Sau, nu cumva ar trebui să observăm aici că acest fundaţionism este unul aparte, care nu trimite pur şi simplu la un fundament în sens clasic, ci care face, în esenţă, dintr-o activitate mentală măsura însăşi a întregii matematici?) Matematica pare a fi astfel o magmă mentală proteică. Apoi, putem să considerăm că vechile „obiecte” (în măsura în care sunt acceptabile pentru poziţia intuiţionistă) apar în demonstraţii ca „momente fugitive” ale unei desfăşurări continue a minţii matematicianului – ele sunt în acest cadru „puncte de respiro”, şi nu modele statice, repere („ontologice”, *a priori*) necesare ce preexistă investigaţiei.

De fapt, la drept vorbind, matematica are de-a face cu „activităţi”, cu o unică activitate practic, şi nu cu „obiecte” (sau, dacă se preferă, cu „obiecte vii ale gândirii”) – nimic nu îi premerge. Deci nicio valoare, fie ea estetică sau legată de utilitate, nu trebuie să afecteze activitatea matematicianului[46]. După cum notează Brouwer, există posibilitatea ca intuiţia de bază a matematicii să fie „abandonată desfăşurării libere (*left to free unfolding*). Această desfăşurare nu este legată de lumea exterioară, şi, de aceea, nici de finitudine şi responsabilitate”[47]. Este vorba acum de o activitate în care până şi elementele ludice de natură cauzală sunt abandonate în favoarea acestei desfăşurări total libere şi introspective (interne). Nelegată de frumuseţea externă, aşa zicând a lumii, matematica recuperează aici adevărata frumuseţe, „cea mai deplină frumuseţe constructivă”. Nu există deci nicio „cenzură” posibilă în acest caz pentru actul matematic, niciun „exterior” care să intervină în acest proces – marca matematicului este pura imanenţă. Fireşte, regăsim în acest punct şi aspecte de natură etică, ce transformă activitatea matematică şi într-o problemă existenţială.

[45] În ce măsură este coerent acest gest rămâne ca o întrebare asupra căreia să revenim cu un alt prilej.

[46] Fără a insista în acest context asupra paralelei, să notăm din nou aici faptul că Brouwer reiterează esenţa demersului cartezian din Regula I a *Regulilor utile şi clare pentru îndrumarea minţii în cercetarea adevărului*. Pentru a completa această paralelă, să mai menţionăm, tot pe scurt, şi reducerea cunoaşterii la Descartes la două acte ale intelectului, intuiţia şi deducţia, cu observaţia că deducţia carteziană reprezintă o continuare a intuiţiei, ea putând fi înţeleasă ca o intuiţie lărgită. Dincolo de cronologia firească, există şi posibilitatea unei lecturi inverse, care îl transformă pe Descartes într-un intuiţionist *avant la lettre*. Vezi în acest sens şi Alexandru Surdu, *Neointuiţionismul*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1977, pp. 34–37.

[47] L.E.J. Brouwer, „Consciousness, Philosophy, and Mathematics”, p. 484.

h) Caracterul moral, eliberator al matematicii intuiţioniste

Am amintit deja anterior că van Dalen înscria matematica intuiţionistă a lui Brouwer în zona „misticismului moral"; este în fapt o recuperare a absolutului în imanenţa conştiinţei – ceea ce permite totodată eliberarea de legăturile de subordonare cu ceilalţi, explicite sau implicite (prin limbaj, societate, prin însăşi cunoaşterea); matematica intuiţionistă conţine atât promisiunea unui individualism absolut, eliberator, cât şi pe cea a unei comunicări dincolo (de fapt, dincoace, în subiectul însuşi) de limbaj[48].

Astfel, pe de o parte, matematica – doar practicată intuiţionist! – reprezintă singura posibilitate intelectuală de a te sustrage sistemului de diverse (dacă nu chiar infinite) subordonări faţă de alteritate[49], într-un fel de a fi tu însuţi[50].

Pe de altă parte, după cum observă Fraser, matematica privită ca o formă de gândire superior structurată şi riguroasă nu este pentru Brouwer niciodată lipsită de o cauză (raţiune) *socială* de a fi. Nici măcar matematica intuiţionistă nu poate pune între paranteze existenţa acestei cauze. Dar, „dacă este orientată în mod corect – adică intuiţionist –, această cauză este în mod fundamental eliberatoare (*essentially subtractive*), în măsura în care ea restituie o libertate riguroasă gândirii care «transgresează cămaşa de forţă a limbajului». Dacă însă practica matematică este în mod eronat subordonată artificiilor de limbaj, cauzele cărora le serveşte devin strâns legate de dispozitivele puterii, făcându-le pe acestea astfel şi mai «abile» (*cunning*). (…) Brouwer caută să confere intuiţionismului un imbold etic"[51].

[48] Remarcile precedente duc spre o afinitate a intuiţionismului brouwerian cu fenomenologia de sorginte husserliană. Această apropiere a fost investigată de mai mulţi autori. Pentru o abordare extinsă, se poate consulta Mark van Atten, *Brouwer Meets Husserl. On the Phenomenology of Choice Sequences*, Springer, Dordrecht, 2007.

[49] De unde în această privinţă şi o altă apropiere a lui Brouwer, de data aceasta de Schopenhauer. Fireşte, în cadrele pesimismului schopenhauerian găseam cu totul alte soluţii (parţiale) pentru a permite eliberarea subiectului. Vezi aici W.P. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, îndeosebi observaţiile de la p. 143.

[50] Pentru a continua suita raportărilor lui Brouwer la istoria filosofiei pe care le-am realizat la acest punct, să notăm şi apropierea sa de Spinoza, prin această înţelegere a libertăţii în cadre intelectualist-cognitiviste. Fireşte, există şi o mare deosebire, întrucât la Spinoza găsim echivalarea *causa sive ratio* şi libertatea înţeleasă ca necesitate, pe când la Brouwer expresia cunoaşterii se va materializa în libertatea matematică absolută dată de acea desfăşurare liberă a intuiţiei de bază a matematicii.

O scurtă observaţie privind toate aceste dese trimiteri la istoria filosofiei pe care le facem prezentând concepţia lui Brouwer, făcând însă apel la un citat din W.P. van Stigt care exprimă perfect şi concluzia noastră în acest punct (chiar dacă afinităţile sesizate de el şi de noi nu sunt întru totul aceleaşi). Astfel, van Stigt apreciază că „[a]nalizând ideile filosofice ale lui Brouwer, cineva poate găsi asemănări izbitoare cu interpretarea solipsistă extremă a lui Fichte realizată subiectivismului kantian, cu pesimismul schopenhauerian şi cu intuiţionismul lui Bergson. Cu toate acestea filosofia lui Brouwer este unică – prin asimilarea anumitor părţi din varii forme de idealism şi prin sublinierea rolului predominant al matematicii în procesul general al gândirii umane, el a creat o filosofie care este numai şi numai a lui" (W.P. van Stigt, *op. cit.*, p. 112).

[51] Z. Fraser, *op. cit.*, p. 100.

Matematica poate fi considerată şi ca un „îndreptar" al greşelilor / derivelor din cunoaştere din istoria umanității, având astfel şi o funcție „etică". Tocmai că, eliberată de orice constrângere morală „exterioară", matematica se poate reîntoarce în zona moralității prin însăşi semnificația profundă a activității sale, se poate instaura cu adevărat ca un model moral pentru ființa umană.

Două observații suplimentare credem că sunt binevenite în acest punct. Întâi de toate, să continuăm remarcile anterioare şi să subliniem posibilitatea ca identificarea unei esențe (matematizante) a activității intelectului să genereze, prin ea însăşi, o semnificație morală majoră. Distinctiv aici, raportat la teoriile filosofice care legau încă din Antichitate cunoaşterea de morală, este situarea absolut imanentă a celor două demersuri. Fireşte, se poate afirma că sursa de inspirație filosofică este una kantiană, mai ales în ceea priveşte teoria cunoaşterii (chiar dincolo de numeroasele deosebiri dintre cei doi gânditori). Problema este că la Brouwer nu avem de-a face cu două demersuri critice (cu două *Critici*…), ci cu o unică critică, cu o dublă semnificație: cognitivă şi morală. Filosofia sa morală, atâta câtă este, nu se constituie de altfel în vreun sistem, nu capătă niciun contur ferm, niciun domeniu discursiv aparte. Ea survine din desfăşurarea cunoaşterii, a adevăratei cunoaşteri.

În al doilea rând, merită să sesizăm aici şi insistența cu care Brouwer vorbeşte despre legătura dintre ştiință (mai precis dintre discursul acesteia) şi fenomenele de instituire şi transmitere ale puterii (politice). Politicul (socialul) devine domeniul de manifestare coerentă, sistematică a celor care trăiesc în iluzie şi îi determină pe ceilalți să facă acelaşi lucru. Brouwer afirmă că ştiința este, de fapt, cea mai evoluată formă în istoria umanității a acestei manipulări în vederea instaurării credinței într-o realitate externă stabilă şi a conformării necesare la aceasta. Cunoaşterea spre care trimite Brouwer denunță practic *ab initio* orice formă oficială de cunoaştere, lăsând individului sarcina de a recupera pe cont propriu, pornind de la sinele său sublimat, ceea ce înseamnă cunoaştere. Ceea ce pentru Brouwer înseamnă şi morală, şi viață. Brouwer este astfel unul dintre primii gânditori care denunță explicit legătura dintre ştiință şi politică.

BIBLIOGRAFIE

Vladimir I. Arshinov şi Vjacheslav E. Voitsekhovich, „Synergetic Knowledge: Between the Network and the Principles", în Vladimir Arshinov şi Christian Fuchs (eds.), *Causality, Emergence, Self-Organisation*, NIA-Priroda, Moscow, pp. 182–194.

Mark van Atten, *Brouwer Meets Husserl. On the Phenomenology of Choice Sequences*, Springer, Dordrecht, 2007

David Bates, „Crisis Between the Wars: Derrida and the Origins of Undecidability", *Representations* 90, Spring 2005, pp. 1–27.

Douglas S. Bridges, „Reality and Virtual Reality in Mathematics", 2006 (disponibil la http://www.math.canterbury.ac.nz/~d.bridges/files/real.pdf)

L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, Vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam & Oxford / American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1975.

L.E.J. Brouwer, „On the Foundations of Mathematics [Over de Grondslagen der Wiskunde]" (1907), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, Vol. I, pp. 11–101.

L.E.J. Brouwer, „Consciousness, Philosophy, and Mathematics" (1948), în L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, Vol. I, pp. 480–494.

L.E.J. Brouwer, „Intuitionism and Formalism", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, Vol. 37 (1), pp. 55–64 (articol publicat electronic la 21 decembrie, 1999, reprodus din *Bull. Amer. Math. Soc.* 20, 1913, pp. 81–96).

L.E.J. Brouwer, „Life, Art, and Mysticism [Leven, Kunst, en Mystiek]", 1905, trad. de W. P. van Stigt, în Barry Stocker (ed.), *Post-Analytic* Tractatus, Ashgate, Aldershot, England / Burlington, USA, 2004, pp. 5–45.

Dirk van Dalen (editor), *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge University Press, Cambridge etc., 1981.

Dirk van Dalen, *The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, London etc., 2011 [1981].

Dirk van Dalen, „Intuitionism – Counting its Blessings", *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 3, 1996, pp. 1–22 (http://aleteya.cs.buap.mx/~jlavalle/papers/van%20Dalen/Intuitionism%20-%20Counting%20its%20Blessings.pdf).

Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher. How Mathematics Is Rooted in Life*, Springer, London, 2013.

Joseph Warren Dauben, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis. A Personal and Mathematical Odyssey*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995.

George van Driem, „The Language Organism. The Leiden theory of language evolution", http://www.himalayanlanguages.org/files/driem/pdfs/prague.pdf.

Michael Dummett, *Elements of Intuitionism*, sec. ed., Clarendon Press, Oxford, 2000.

Miriam Franchella, „L.E.J. Brouwer: Towards Intuitionistic Logic", *Historia Mathematica*, 22, 1995, pp. 304–322.

Miriam Franchella, „Philosophies of Intuitionism: Why We Need Them", *Teorema*, Vol. XXVI (1), 2007, pp. 73–82.

Zachary Fraser, „The Law of the Subject: Alain Badiou, Luitzen Brouwer and the Kripkean Analyses of Forcing and the Heyting Calculus", *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy*, vol. 2, no. 1–2, 2006, pp. 94–133 (disponibil la http://cosmosandhistory.org/index.php/journal/article/viewFile/30/59).

A. Heyting, „L.E.J. Brouwer", în Raymond Klibansky (ed.), *Contemporary Philosophy. A Survey*, vol. I: *Logic and Foundations of Mathematics*, La Nuova Italia Editura, Firenze, 1968, pp. 308–315.

Tomasz Placek, *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity. A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*, Springer-Science+Business Media, B.V., Dordrecht, 1999.

Victor Popescu, „Teoria russelliană a timpului: o alternativă la teoriile A şi B", *Revista de filosofie*, Vol. LXIII, Nr. 1, 2016, pp. 76–88.

Jan M. Smith, „Evolution and Logic", în P. Dybjer, S. Lindström, E. Palmgren, G. Sundholm (eds.), *Epistemology versus Ontology.Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*, Springer, Dordrecht, 2012, pp. 129–138.

Walter P. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam etc., 1990.

Alexandru Surdu, *Neointuiţionismul*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1977.

A.S. Troelstra, „Remarks on Intuitionism and the Philosophy of Mathematics" (revised edition), *ITLI Prepublication Series* X-90-01, University of Amsterdam, 1990.