TRADUCERI

ALFRED N. WHITEHEAD
BERTRAND RUSSELL

PRINCIPIA MATHEMATICA
Teoria tipurilor logice

1. Principiul cercului vicios,
2. Natura funcțiilor propoziționale,
3. Definiția şi ambiguitatea sistematică a adevărului şi falsului,
4. De ce o funcție dată presupune argumente de un anumit tip,
5. Ierarhia funcțiilor şi a propozițiilor,
6. Axioma reductibilității,
7. Motivele acceptării axiomei reductibilității,
8. Contradicțiile.

Teoria tipurilor logice, obiectul prezentului capitol, ni se recomandă de la sine, în primul rând datorită capacității ei de-a rezolva anumite contradicții, dintre care cea mai cunoscută matematicienilor este cea a lui Burali-Forti despre cel mai mare număr ordinal. Însă teoria nu este în întregime dependentă de această recomandare indirectă, ea are şi o anumită consonanță cu simțul comun, ceea ce îi conferă o inerentă credibilitate. Vom începe deci prin a face descrierea teoriei, după care o vom aplica în rezolvarea contradicțiilor.

1. Principiul cercului vicios

O analiză a paradoxurilor, în vederea evitării lor, ne arată că toate provin dintr-un anumit tip de cerc vicios. Cercul vicios în chestiune rezultă din presupunerea că o colecție de obiecte poate conține membri definiți în termenii colecției luată ca întreg[1]. Colecția propozițiilor, de exemplu, presupune în componența sa o propoziție care spune că „toate propozițiile sunt adevărate sau false”. S-ar părea totuşi ca un astfel de enunț (în orig. *statement*) să nu poată fi legitim dacă „toate propozițiile” nu s-au referit la o colecție deja definită, ceea ce nu este cazul de vreme ce noi propoziții sunt formate prin enunțuri despre „toate propozițiile”. Va trebui, prin urmare, să spunem că enunțurile despre „toate propozițiile” sunt fără sens[2]. Mai general, dată fiind o mulțime oarecare de obiecte, presupunând că

[1] Autorii folosesc termenii *colecție* şi *membru al colecției* în locul celor de *mulțime* şi *element al mulțimii*, care la data respectivă nu intraseră în vocabularul logicii şi al matematicii. Dat fiind că înțelesul lor este în mare măsură acelaşi, am păstrat exprimarea originală. (n. trad.)

[2] Aici, ca de altfel pe tot cuprinsul lucrării, nu se face o distincție suficient de clară între propoziție şi enunț, nici între propoziție şi judecată. Conform uzanțelor actuale, l-am tradus pe *sentence* prin propoziție, iar pe *statement* prin enunț. Termenul *proposition* a fost tradus prin *propoziție* sau prin *judecată*, în funcție de context. La rândul lui, *judgement* a fost tradus prin

Rev. filos., **LXIV**, *5*, p. 763–792, Bucureşti, 2017

respectiva mulțimea are totalitate, dacă ea conține membri ce presupun această totalitate, atunci mulțimea în cauză nu poate avea totalitate. Spunând că o mulțime nu are totalitate, înțelegem, în primul rând, că nici un enunț cu sens nu poate fi făcut despre „toți membrii săi”[3]. Propozițiile, după cum arată ilustrările de mai sus, trebuie luate ca o mulțime fără totalitate. Acelaşi lucru se poate spune, după cum vom vedea imediat, despre funcțiile propoziționale, chiar dacă ele sunt în aşa fel restrânse încât să aibă semnificație când iau ca argument un obiect dat *a*. În asemenea cazuri se impune să despicăm mulțimea inițială în mulțimi mai mici, fiecare fiind capabilă de totalitate. Iată ce îşi propune să facă teoria tipurilor.

Principiul care ne permite să evităm totalitățile ilegitime poate fi formulat după cum urmează: „orice presupune pe *toți* ai unei colecții nu trebuie să facă parte din colecție”; sau invers: „dacă o anumită colecție, presupusă a avea totalitate, conține membri definibili în termenii acelei totalități, atunci presupusa colecție nu are totalitate”. Pentru că ne permite să evităm cercul vicios al totalităților ilegitime asumate, îl vom numi „principiul cercului vicios”. Argumentele respinse în baza principiului cercului vicios vor fi numite „falaciile cercului vicios”[4]. Astfel de argumente, în anumite circumstanțe, pot duce la contradicții, însă adeseori se întâmplă ca propozițiile la care conduc ele să fie adevărate, deşi argumentele ca atare sunt falacioase. Să luăm ca exemplu legea terțului exclus în forma „toate propozițiile sunt adevărate sau false”. Dacă din această lege noi deducem că, fiind vorba de o propoziție, legea terțului exclus este ea însăşi adevărată sau falsă, vom comite o eroare a cercului vicios. „Toate propozițiile” trebuie cumva limitată înainte de-a deveni o totalitate legitimă şi orice asemenea limitare trebuie facută în aşa fel încât enunțurile despre totalitate să cadă în afara totalității. Tot astfel în cazul scepticului imaginar, care, asertând că nu ştie nimic asertează un nonsens, şi care, contrazis fiind prin întrebarea dacă ştie că nu ştie nimic este contrazis printr-un argument ce implică eroarea cercului vicios. Pentru ca asertiunea scepticului să poată avea sens trebuie limitate lucrurile asupra cărora el îşi asertează ignoranța, din cauză că lucrurile asupra cărora este posibil să fii ignorant formează o totalitate ilegitimă. Şi, de îndată ce a realizat o limitare corespunzătoare a colecției de propoziții asupra cărora îşi asertează ignoranța, propoziția că el este ignorant cu

judecată, însă şi acesta are două sensuri – un sens logic (ceea ce exprimă propoziția) şi unul psihologic (actul de-a judeca, gândi). Pentru acesta din urmă am folosit uneori românescul *judecare*. Important, din punct de vedere logic, este rezultatul actului de judecare şi nu actul ca atare. Acolo unde am considerat că echivalările pot ridica probleme am făcut precizarea în text. (n. trad.)

[3] Noțiunea de *totalitate*, în ciuda precizărilor făcute de autori, nu este foarte clară. Nu ştim dacă această *totalitate* este ea însăşi o mulțime sau doar o caracteristică a mulțimii. Punând-o în dependență de capacitatea noastră de-a face propoziții despre elementele mulțimii, autorii îi sporesc şi mai mult dificultatea. Nu-mi dau seama, pentru moment, dacă mulțimea vidă şi mulțimea singulară pot fi şi ele apreciate ca mulțimi cu totalitate. (n. trad.)

[4] Termenul englezesc *fallacy* provine din latinescul *fallacia* (*-ae*) care înseamnă *înşelător*, *fals*, *mincinos*. În limba română au fost adoptați termenii *falacie* şi *falacios*, care, la fel ca în alte limbi înseamnă *eroare*, respectiv *eronat*. Dată fiind echivalența lor, îi vom folosi de aici înainte în egală măsură (n. trad.).

privire la fiecare membru al acestei colecții nu trebuie să fie ea însăşi membru al colecției. Prin urmare, niciun scepticism valabil nu este deschis acestei forme de respingere.

Paradoxurile logicii simbolice privesc diferite categorii de obiecte – propoziții, clase, numere cardinale şi ordinale etc. Toate aceste categorii de obiecte, după cum vom vedea, reprezintă totalități ilegitime, fiind deci capabile să dea naştere la falacii ale cercului vicios. Însă cu ajutorul teoriei (explicată în cap. III) prin care enunțurile verbal formulate în termenii claselor şi relațiilor sunt reduse la enunțuri formulate în termenii funcțiilor propoziționale, paradoxurile sunt în aşa fel reduse încât se referă la propoziții şi la funcții propoziționale. Paradoxurile referitoare la propoziții sunt numai indirect relevante pentru matematică, față de cele mai apropiate de interesul matematicianului care sunt formulate, toate, cu ajutorul *funcțiilor propoziționale*. Vom continua deci prin a vorbi despre funcții propoziționale.

2. Natura funcțiilor propoziționale

Înțelegem prin „funcție propozițională" ceva ce conține o variabilă x şi exprimă o *propoziție* de îndată ce o valoare îi este dată lui x. Ea diferă de propoziție doar prin aceea că este ambiguă – conține o variabilă cu valoare neasignată (*unassigned*). Corespunde funcțiilor obişnuite din matematică prin faptul de a conține o variabilă neasignată şi diferă de acestea prin faptul că valorile ei sunt propoziții. De exemplu, „x este om" sau „$\sin x = 1$" sunt funcții propoziționale. Vom vedea că eroarea cercului vicios îşi poate face loc de la bun început admițând ca posibile argumente ale funcției termeni ce presupun funcția. Această formă a falaciei este foarte instructivă, iar evitarea ei conduce, după cum vom vedea, la ierarhia tipurilor.

Problema naturii funcției[5] nu este nici pe departe una simplă. Aşa cum am spus, trăsătura distinctivă a unei funcții este *ambiguitatea*. Să luăm ca exemplu legea identității în forma ei obişnuită „*A* este *A*". Psihologic vorbind, este clar că aici avem o singură judecată (*judgement*). Dar ce avem de spus relativ la obiectul acestei judecăți? Noi nu judecăm că Socrate este Socrate, nici că Platon este Platon şi nici altceva cu privire la judecățile definite care sunt instanțe ale legii identității. Şi totuşi, fiecare judecată ține într-un anumit sens de domeniul judecății noastre. De fapt, noi gândim o instanță ambiguă a funcției propoziționale „*A* este *A*". Se pare că avem un gând fără un obiect definit, obiectul său fiind unul nedeterminat relativ la valorile funcției „*A* este *A*". Acesta este tipul de ambiguitate ce constituie esența unei funcții. Când vorbim despre „Φx", unde x este nespecificat, înțelegem o valoare a funcției, însă nu una definită. Putem exprima aceasta spunând că „Φx" *denotă ambiguu* pe Φa, Φb, Φc etc., unde Φa, Φb, Φc etc. sunt valorile lui „Φx".

Când spunem că „Φx" denotă ambiguu pe Φa, Φb, Φc etc., vrem să spunem că „Φx" înseamnă unul dintre obiectele Φa, Φb, Φc etc., însă nu unul definit, ci unul nedeterminat. În consecință, „Φx" are o semnificație bine definită (în ciuda

[5] În cele ce urmează prin „funcție" vom înțelege întotdeauna „funcția propozițională", despre alte funcții nu va fi vorba în acest capitol.

faptului că esenţa ei este de-a fi ambiguă) numai dacă obiectele Φa, Φb, Φc etc. sunt bine definite. Altfel spus, o funcţie nu este bine definită dacă valorile ei nu sunt toate bine definite. Urmează de aici că nici o funcţie nu poate avea printre valorile ei ceva care să presupună funcţia, pentru că, dacă ar avea, nu am putea privi obiectele ambiguu denotate de funcţie ca definite până când funcţia însăşi nu a fost definită; or, lucrurile stau exact invers, funcţia nu poate fi definită până când valorile ei nu sunt definite. Acesta este un caz particular, poate cel mai important caz al principiului cercului vicios. O funcţie este ceea ce denotă ambiguu ceva al unei totalităţi, acestea fiind valorile funcţiei; prin urmare, această totalitate nu poate conţine nici un membru care să presupună funcţia, pentru că ar însemna să conţină membri ce implică totalitatea, şi atunci, conform principiului cercului vicios, nu ar mai fi totalitate.

Se poate vedea, conform descrierii făcute, că valorile unei funcţii sunt presupuse de funcţie, şi nu invers[6]. Este suficient de clar, pentru orice caz particular, că o valoare a unei funcţii nu presupune funcţia. Propoziţia „Socrate este om”, de exemplu, poate fi perfect înţeleasă fără a fi privită ca valoare a funcţiei „x este om”. Este adevărat, pe de altă parte, că o funcţie poate fi înţeleasă şi fără să fie necesară o înţelegere separată şi individuală a valorilor ei. Dacă lucrurile nu ar sta aşa, nici o funcţie nu ar mai putea fi înţeleasă, pentru că numărul valorilor (adevărate şi false) ale unei funcţii este necesar infinit şi în mod necesar se vor găsi argumente posibile care nu ne sunt cunoscute.

Din punct de vedere practic este necesar să distingem funcţia de o valoare nedeterminată a ei. Putem privi funcţia ca pe ceva ce denotă ambiguu, iar valoarea nedeterminată a funcţiei ca pe ceva ce este denotat ambiguu. Dacă valoarea nedeterminată a funcţiei se notează cu „Φx”, funcţia însăşi se va nota cu „$\Phi \hat{x}$” (orice altă literă poate fi folosită în locul lui x). Va trebui deci să spunem că „Φx este o propoziţie”, iar „$\Phi \hat{x}$ este o funcţie propoziţională”. Când spunem „Φx este o propoziţie”, înţelegem să spunem ceva care este adevărat pentru orice valoare posibilă a lui x, deşi nu noi hotărâm ce valoare va avea x. Facem astfel un enunţ ambiguu despre oricare dintre valorile funcţiei. Dar când spunem „$\Phi \hat{x}$ este o funcţie”, nu facem un enunţ ambiguu. Ar fi mai corect să spunem că facem un enunţ despre o ambiguitate, având în vedere că şi funcţia este o ambiguitate. Funcţia ca atare, $\Phi \hat{x}$, este singurul lucru care denotă ambiguu valorile sale, în timp ce Φx, unde x este nespecificat, este unul dintre obiectele denotate, ambiguitatea aparţinând manierei de denotare.

Am văzut că, în conformitate cu principiul cercului vicios, valorile unei funcţii nu pot conţine termeni definibili în termeni de funcţie. Acum, dată fiind o funcţie $\Phi \hat{x}$, valorile ei sunt toate propoziţii de forma Φx. De unde rezultă că nu trebuie să existe propoziţii de forma Φx unde x să ia o valoare care să o presupună pe $\Phi \hat{x}$. (Dacă acesta ar fi cazul, valorile funcţiei nu ar fi în totalitate determinate până când funcţia nu a fost ea însăşi determinată, în timp ce noi am găsit că funcţia

[6] Funcţia presupune valorile, nu valorile funcţia. Această caracteristică a funcţiei propoziţionale, fundamentală în opinia autorilor, este o consecinţă a principiului cercului vicios (n. trad.).

nu este determinată dacă valorile ei nu sunt anterior determinate.) Prin urmare, nu trebuie să existe vreun lucru precum funcţia $\Phi \hat{x}$ cu argumentul $\Phi \hat{x}$, sau cu vreun alt argument care să o presupună pe $\Phi \hat{x}$. Altfel spus, simbolul „$\Phi(\Phi \hat{x})$" nu trebuie să exprime o propoziţie aşa cum exprimă „Φa", dacă Φa este o valoare a lui $\Phi \hat{x}$. De fapt, „$\Phi(\Phi \hat{x})$" trebuie să fie un simbol care să nu exprime nimic (putem spune că el nu este semnificant). Astfel, relativ la orice funcţie $\Phi \hat{x}$ vor exista argumente pentru care funcţia nu are nici o valoare şi argumente pentru care ea are o valoare. Vom numi argumentele pentru care $\Phi \hat{x}$ are valoare „posibilele valori ale lui x". Despre $\Phi \hat{x}$ vom spune că „este semnificantă (sau că are semnificaţie – n. trad) relativ la argumentul x", dacă $\Phi \hat{x}$ are valoare pentru argumentul x.

Va trebui să evităm o neînţelegere când spunem că „$\Phi(\Phi \hat{x})$" este fără sens, şi deci nici adevărată, nici falsă. Dacă „$\Phi(\Phi \hat{x})$" a fost interpretată drept „valoarea lui $\Phi \hat{x}$ pentru argumentul $\Phi \hat{x}$ este adevărul", aceasta nu este fără sens, ci falsă. Ea este falsă din exact aceleaşi considerente din care este falsă „Regele Franţei este chel", şi anume, pentru că nu există nici un lucru precum „valoarea lui $\Phi \hat{x}$ pentru argumentul $\Phi \hat{x}$". Dar când, pentru un anumit argument a asertăm Φa, noi nu înţelegem să asertăm „valoarea lui $\Phi \hat{x}$ pentru argumentul a este adevărul"; ceea ce înţelegem să asertăm aici este propoziţia efectivă care este valoarea lui $\Phi \hat{x}$ pentru argumentul a. De pildă, dacă $\Phi \hat{x}$ este funcţia „$\hat{x}$ este om", atunci Φ(Socrate) va fi „Socrate este om" şi nu „valoarea funcţiei «$\hat{x}$ este om» pentru argumentul Socrate este adevărul". Astfel, conform principiului nostru că „$\Phi(\Phi \hat{x})$" este fără sens, nu vom putea în mod legitim nega „funcţia «$\hat{x}$ este om» este om" din cauză că aceasta este un nonsens, însă putem nega „valoarea funcţiei «$\hat{x}$ este om» pentru argumentul «$\hat{x}$ este om» este adevărul", şi aceasta nu pentru că valoarea în chestiune ar fi falsul, ci în baza faptului că nu există nici o astfel de valoare a funcţiei.

Vom nota cu simbolul „$(x).\Phi x$" propoziţia „Φx are loc întotdeauna[7]", adică propoziţia care asertează *toate* valorile lui Φx. Această propoziţie presupune (*involves*)[8] funcţia $\Phi \hat{x}$, nu doar o valoare ambiguă a ei. Asertarea lui Φx, unde x este nespecificat, este o asertare diferită de asertarea tuturor valorilor lui $\Phi \hat{x}$, pentru că prima este o aserţiune ambiguă, în timp ce a doua nu este în nici un caz ambiguă. Trebuie observat că „$(x).\Phi x$" nu asertează „Φx, pentru toate valorile lui x", pentru că, aşa cum am văzut, sunt şi valori ale lui x pentru care „Φx" nu are sens. Ceea ce se asertează prin „$(x).\Phi x$" sunt numai propoziţiile care sunt valori ale lui $\Phi \hat{x}$; adică numai valorile lui x care o fac pe $\Phi \hat{x}$ cu sens, respectiv, toate argumentele *posibile* pentru care Φx este asertată când o asertăm pe „$(x).\Phi x$". Aşa stând lucrurile, un mod rezonabil de-a o citi pe „$(x).\Phi x$" este „Φx este adevărată pentru toate valorile posibile ale lui x". Totuşi, acesta este o citire mai puţin precisă decât „Φx are loc

[7] Folosim „întotdeauna" (*always*) cu sensul de „în toate cazurile", şi nu „tot timpul". La fel pentru „uneori" (*sometimes*) care însemnă „în unele cazuri".

[8] Pentru a evita confuzia cu implicaţia logică, l-am tradus pe *involves* prin *presupune* (n. trad.).

întotdeauna” din cauză că noțiunea de adevăr nu face parte din conținutul a ceea ce este judecat. Când judecăm că „toți oamenii sunt muritori”, noi judecăm în mod adevărat, însă noțiunea de adevăr nu este în mod necesar în mintea noastră, ea trece dincolo de ceea ce este necesar în judecata că „Socrate este muritor”.

3. Definiția şi ambiguitatea sistematică a adevărului şi falsului

Dat fiind că „$(x).\Phi x$” presupune funcția $\Phi\hat{x}$ ar trebui, conform principiului nostru, ca ea să nu poată fi argumentul lui Φ. Cu alte cuvinte, simbolul „$\Phi\{(x).\Phi x\}$” trebuie să fie fără sens. La prima vedere, acest principiu pare să admită unele excepții. Să luăm exemplul funcției „$\hat{p}$ este falsă” şi să considerăm propoziția „(p). p este falsă”. Aceasta ar trebui să fie o propoziție care să aserteze toate propozițiile de forma „p este falsă”. O astfel de propoziție, am înclina să spunem că, trebuie să fie falsă din cauza faptului că „p este falsă” nu este întotdeauna adevărată. Ajungem astfel la propoziția

„$\{(p).\, p$ este falsă$\}$ este falsă,”

o propoziție pe care am declarat-o imposibilă, unde „(p). p este falsă” este argumentul funcției „$\hat{p}$ este falsă”. Să mai observăm că „(p). p este falsă” se vrea a fi o propoziție despre toate propozițiile, însă, conform cu principiul cercului vicios în forma sa generală, nu ar trebui să existe propoziții despre *toate* propozițiile. Este clar totuşi, dată fiind o funcție, că există o propoziție (adevărată sau falsă) care să aserteze toate valorile sale. Suntem conduşi în final la concluzia că „p este falsă” şi „q este falsă” nu trebuie să fie întotdeauna valorile argumentului p, respectiv q, ale unei singure funcții „$\hat{p}$ este falsă”. Acest lucru este posibil numai dacă cuvântul „fals” are mai multe semnificații, corespunzător diferitelor tipuri de propoziții.

Că termenii „adevăr” şi „fals” au mai multe înțelesuri, diferite între ele, conform tipului de propoziție la care se aplică ei, nu este greu de înțeles. Să luăm o funcție oarecare $\Phi\hat{x}$, cu Φa una dintre valorile sale. Numim tipul de adevăr aplicabil lui Φa „adevăr *prim*”. (A nu se înțelege că acesta ar fi adevăr prim şi în alt context, ceea ce se spune este doar că în contextul nostru el este adevăr prim.) Să considerăm mai departe propoziţa „(x). Φx”. Dacă aceasta are tipul de adevăr corespunzător, înseamnă că orice valoare Φx are „adevăr prim”. Astfel, dacă numim tipul de adevăr corespunzător lui (x). Φx „adevăr *secund*”, o putem traduce pe „$\{(x).\Phi x\}$ are adevăr secund” prin „orice valoare a lui $\Phi\hat{x}$ are adevăr prim”, adică „(x). (Φx are adevăr prim)”. În mod asemănător, dacă simbolizăm cu „$(\exists x).\Phi x$” propoziția „Φx are loc uneori”, ceea ce mai puțin precis s-ar exprima prin „Φx are loc pentru unele valori ale lui x”, vom găsi că $(\exists x).\Phi x$ are adevăr secund dacă există un x pentru care Φx are adevăr prim. Îl putem astfel traduce pe „$\{(\exists x).\Phi x\}$ are adevăr secund” prin „unele valori pentru care $\Phi\hat{x}$ are adevăr prim”, adică „$(\exists x)$. (Φx are adevăr prim”. Aprecieri similare se aplică falsului. Astfel, „$\{(x).\Phi x\}$ are fals secund” va însemna „unele valori ale lui $\Phi\hat{x}$ au fals prim”, adică „$(\exists x)$. (Φx are fals prim)”, pe când „$\{(\exists x).\Phi x\}$ are fals secund" va însemna „toate valorile lui $\Phi\hat{x}$ au fals prim", adică „(x). (Φx are fals prim)". În felul acesta tipul de fals ce poate aparține unei propoziții generale este diferit de cel ce poate aparține unei propoziții particulare.

Aplicând considerațiile de mai sus propoziției „(p). p este falsă", vedem că genul de fals în chestiune se cere specificat. Dacă, de pildă, este vizat falsul prim, atunci funcția „$\hat{p}$ are fals prim" are sens doar când p este tipul de propoziție care are fals prim sau adevăr prim. În consecință, „(p). p este falsă" va fi înlocuită cu un enunț echivalent cu „toate propozițiile având adevăr prim sau fals prim au fals prim". Această propoziție are fals *secund* şi nu poate fi argument al funcției „$\hat{p}$ are fals prim". Dispar astfel excepțiile aparente ale principiului potrivit căruia „$\Phi\{(x).\Phi x\}$" trebuie să fie fără sens.

Considerații similare se pot face relativ la „non-p" şi „p sau q"[9]. S-ar părea că acestea sunt funcții în care orice propoziție poate să apară ca argument. Însă aceasta se datorează ambiguității sistematice din semnificația lui „nu" şi „sau", prin care aceştia se adaptează oricărui gen de propoziție. Pentru a arăta exact cum stau lucrurile, ar fi de dorit să începem cu definiția celui mai simplu gen de *adevăr*, respectiv, *fals*.

Universul constă din obiecte care au diferite calități şi care stau în diferite relații. Unele dintre obiectele universului sunt complexe. Când un obiect este complex, el constă din părți intercorelate. Să considerăm un obiect complex compus din două părți a şi b aflate în relația R. Obiectul complex „a-în-relația-R-cu-b" poate fi perceput. Când este perceput, el este perceput ca un obiect. Atenția ne arată că este complex; *judecăm* atunci că a şi b stau în relația R. O astfel de judecată, fiind derivată din percepție doar prin atenție, poate fi numită „judecată de percepție". Această judecată de pecepție, considerată doar ca o existență (realizare) actuală, este o relație cu patru termeni, şi anume: termenii a şi b, relația R şi perceptorul (cel ce percepe – n. trad.). Percepția, dimpotrivă, este o relație cu doi termeni, şi anume, „a-în-relația-R-cu-b" şi perceptorul. Întrucât un obiect al percepției nu poate fi vid, noi nu îl putem percepe pe „a-în-relația-R-cu-b" dacă a nu este în relația R cu b. De aceea, o judecată de percepție, conform definiției de mai sus, trebuie să fie adevărată. Aceasta nu înseamnă că într-o judecată ce ne *apare* ca fiind de percepție, noi suntem siguri că nu există ceva eronat, întrucât noi putem greşi gândind că judecata noastră a fost realmente obținută doar prin analiza a ceea ce a fost perceput. Dar dacă judecata noastră a fost astfel obținută, ea trebuie să fie adevărată. În final, putem defini *adevărul*, relativ la judecățile considerate, ca stând în faptul că există un complex *corespunzător* gândirii discursive care este judecata. Cu alte cuvinte, când noi judecăm că „a are relația R cu b", judecata noastră este apreciată ca *adevărată* când există (se află – *there is*) un complex „a-în-relația-R-

[9] Negația şi disjuncția, operatorii primari ai *Principiei*, transcriu orice alt operator propozițional verifuncțional. Dacă eroarea cercului vicios nu afectează propozițiile negative şi disjunctive, se înțelege că nici alte propoziții compuse nu vor fi afectate, cu condiția ca operatorii lor principali să fie definibili prin negație şi disjuncție (n. trad.).

cu-*b*”, şi este apreciată ca *falsă* când nu acesta este cazul[10]. Aceasta este definiţia adevărului şi falsului relativ la genul de judecăţi considerat.

Vom vedea că, în conformitate cu descrierea făcută, o judecare (*judgment*)[11] nu are un singur obiect, şi anume, judecata, ci câteva obiecte intercorelate. Cu alte cuvinte, relaţia care constituie judecata nu este o relaţie cu doi termeni – mintea care judecă şi judecata/propoziţia –, ci o relaţie cu mai mulţi termeni: mintea şi ceea ce se cheamă constituienţii judecăţii. Când spunem, prin urmare, „acesta este roşu”, ceea ce se realizează este o relaţie cu trei termeni – mintea, „acesta” şi roşu. Pe de altă parte, când percepem „roşeaţa acestuia”, se realizează o relaţie cu doi termeni – mintea şi obiectul complex „roşeaţa acestuia”. Când se realizează o judecare, există o anume entitate complexă compusă din minte şi din diferitele obiecte ale judecării. Când judecata este adevărată, în cazul genului de judecată considerat, există un complex de *obiecte* corespunzător doar judecăţii. Falsul, relativ la clasa noastră de judecăţi, constă în absenţa complexului corespunzător de obiecte. Urmează, conform acestei teorii, că o „judecată” este o falsă abstracţie, în sensul în care judecata se presupune a fi obiectul unei judecări, pentru că o judecată are mai multe obiecte, nu unul. Multitudinea de obiecte din judecare/judecată (ca opusă percepţiei) este cea care i-a făcut pe oameni să vorbească despre gândire ca fiind „discursivă”, deşi ei nu par să fi realizat cu claritate ce înseamnă acest epitet.

Datorită pluralităţii de obiecte aferente unei judecări singulare, ceea ce numim „judecată” (în sensul în care aceasta se deosebeşte de propoziţia care o exprimă) nu este o entitate singulară. În consecinţă, expresia (*the phrase*) care exprimă o judecată este ceea ce numim un simbol „incomplet”; ea nu are semnificaţie în sine, pentru a dobândi o semnificaţie completă ea necesită anumite completări[12]. Acest fapt este oarecum obturat de circumstanţa că judecata în sine suplineşte completarea, şi că judecata în sine nu aduce nici o adăugare *verbală* propoziţiei. Astfel, „propoziţia «Socrate este om»” foloseşte „Socrate este om”, într-un mod care presupune o completare de un anume fel, înainte ca ea să dobândească o semnificaţie completă. Însă, când eu judec „Socrate este om” semnificaţia este completată prin actul judecării şi deci nu mai avem un simbol incomplet. Faptul că propoziţiile sunt simboluri incomplete este filosofic important şi într-o anumită măsură relevant pentru logica simbolică.

[10] Expresiile *there are*, *there is* se traduc, de regulă, prin *sunt*, *se află*, *se găsesc*, respectiv, *este*. Pentru simplificarea exprimării, acolo unde ideea nu este periclitată, ele au fost traduse prin *există* (n. trad.).

[11] Am tradus astfel termenul *judgment*, pe care, aşa cum am mai spus, autorii îl folosesc în două accepţiuni diferite – actul mental de-a judeca şi judecata ca atare, adică rezultatul acestui act (a se vedea şi nota 2). În propoziţia de faţă este vorba de *judgment*-ul primei accepţiuni, doar el poate avea ca obiect judecata (rezultatul judecării/gândirii exprimat prin propoziţie) (n. trad.).

[12] O nouă dificultate de traducere a apărut prin introducerea termenului *phrase*, pe care, dat fiind contextul, l-am tradus prin *expresie*. B. Russell, autorul principal al acestui text, nu ţine să fie foarte consecvent în utilizarea termenilor. Dacă în pasajul vizat calitatea de simbol incomplet revine acestei *phrase*, câteva rânduri mai jos el vorbeşte despre *proposition* ca despre un simbol incomplet. Dacă ţinem seama că, la Russell, simboluri incomplete sunt clasele şi descripţiile, atunci propoziţia este simbol incomplet, nu judecata pe care aceasta o exprimă. Ceea ce pare să spună şi textul de faţă, în ciuda obscurităţilor semnalate (n. trad.).

Judecățile cu care ne-am ocupat până acum sunt de aceeaşi formă cu judecățile de percepție, subiectul lor este întotdeauna particular şi definit. Însă multe judecăți nu au această formă. De exemplu: „toți oamenii sunt muritori", „am întâlnit un om", „unii oameni sunt greci". Înainte de a ne ocupa de aceste judecăți, vom introduce câțiva termeni tehnici.

Vom numi „un *complex*" orice obiect „*a* în relația *R* cu *b*" sau „*a* având calitatea *q*", sau „*a*, *b* şi *c* stau în relația *S*". Strict vorbid, un *complex* este orice se realizează/apare în univers şi nu este simplu. Vom spune despre o judecată că este *elementară* dacă asertează doar astfel de lucruri precum „*a* în relația *R* cu *b*" sau „*a* având calitatea *q*", sau „*a*, *b* şi *c* stau în relația *S*". O judecată *elementară* este adevărată atunci când există un complex corespunzător şi falsă când nu există un asemenea complex.

Să luăm acum o astfel de judecată ca „toți oamenii sunt muritori". Judecata nu corespunde *unui* complex, ci mai multora, şi anume, „Socrate este muritor", „Platon este muritor", „Aristotel este muritor" etc. (Pentru moment nu este necesar să ne întrebăm dacă acestea nu presupun un tratament suplimentar înainte de-a ajunge la ultimul complex implicat. Pentru ilustrare, „Socrate este om" este tratată aici ca o judecată elementară, când, de fapt, ea nu este astfel, după cum se va explica mai târziu. Realmente judecățile elementare nu sunt foarte uşor de găsit.) Nu intenționăm să negăm că aici poate exista o relație între conceptul *om* şi conceptul *muritor*, care poate fi *echivalentă* cu „toți oamenii sunt muritori", însă, în nici un caz, această relație nu este acelaşi lucru cu ceea ce afirmăm noi când spunem că toți oamenii sunt muritori. Judecata noastră că toți oamenii sunt muritori adună la un loc un număr de judecăți elementare. Ea nu este totuşi compusă din acestea întrucât faptul că Socrate este muritor nu este parte a ceea ce asertăm, cineva poate înțelege aserțiunea noastră şi fără să fi auzit vreodată de Socrate. Pentru a înțelege judecata „toți oamenii sunt muritori" nu este necesar să ştim ce oameni există. Trebuie să admitem, prin urmare, ca un nou tip de judecată astfel de aserțiuni generale precum „toți oamenii sunt muritori". Noi asertăm că, dat fiind că x este om, x este întotdeauna muritor. Asertăm, cu alte cuvinte, că „x este muritor" pentru *orice* x care este om. Suntem în felul acesta capabili să judecăm (indiferent dacă adevărat sau fals) că *toate* obiectele care au atribuite anumite proprietăți au de asemenea atribuite alte proprietăți. Prin urmare, date fiind funcțiile propoziționale $\Phi\hat{x}$ şi $\Psi\hat{x}$, există o judecată care să o aserteaze pe Ψx pentru orice x pentru care este asertată Φx. Astfel de judecăți vor fi numite *judecăți generale*.

Este evident (din cele explicate) că definiția adevărului în cazul judecăților generale nu este aceeaşi cu definiția adevărului în cazul judecăților elementare. Să numim *adevărul* pe care îl atribuim judecăților elementare „adevăr elementar". Atunci când asertăm că este adevărat că toți oamenii sunt muritori, vom înțelege că toate judecățile de forma „x este muritor", când x este om, au adevăr prim. Vom defini aceasta ca „adevăr de ordinul doi" sau ca „adevăr secund". Prin urmare, dacă exprimăm judecata „toți oamenii sunt muritori" sub forma

„(x). x este muritor dacă x este om" şi numim această judecată p, atunci, „p este adevărată” trebuie să însemne „p are adevăr secund”, ceea ce înseamnă

„(x). «x este muritor» are adevăr elementar dacă x este om”

Pentru a evita nevoia unei limitări explicite a variabilei subiect este convenabil să înlocuim interpretarea de mai sus pentru „toţi oamenii sunt muritori” cu o interpretare uşor diferită. Propoziţia „toţi oamenii sunt muritori” este echivalentă cu „«x este om» implică «x este muritor» pentru toate valorile posibile ale lui x”. Aici x nu este restricţionat la asemenea valori cum sunt oamenii, ci poate avea orice valoare astfel ca „«x este om» implică «x este muritor»” să aibă *sens*, adică să fie sau adevărată, sau falsă. O astfel de propoziţie este numită „implicaţie formală”. Avantajul acestei forme este că valorile pe care le poate lua variabila sunt date de funcţia pentru care variabila este argument: valorile pe care variabila le ia sunt toate valorile pentru care funcţia are sens.

Folosim simbolul „(x). Φx” pentru a exprima judecata generală ce asertează toate judecăţile de forma „Φx”. În acest fel, judecata „toţi oamenii sunt muritori” este echivalentă cu

„(x). «x este om» implică «x este muritor»”

sau, în virtutea definiţiei implicaţiei, cu

„(x). x nu este om sau x este muritor”

Aşa cum am spus, sensul adevărului aplicabil acestei propoziţii nu este acelaşi cu sensul aplicabil lui „x este om” sau lui „x este muritor”. În general, în orice judecată (x).Φx, sensul în care această judecată este, sau poate fi adevărată, nu este acelaşi cu sensul în care Φx este, sau poate fi adevărată. Dacă Φx este o judecată elementară, ea este adevărată când *indică* un complex corespunzător. Însă (x). Φx nu indică un singur complex corespunzător: aceste complexuri[13] sunt tot atât de numeroase pe cât sunt valorile lui x.

Urmează din cele spuse că o judecată precum „toate judecăţile făcute de Epimenide sunt adevărate” va fi aptă de adevăr numai dacă toate judecăţile sale sunt de acelaşi ordin. Dacă sunt de ordine diferite, n fiind ordinul cel mai mare, putem face n aserţiuni de forma „toate judecăţile de ordin m făcute de Epimenide sunt adevărate”, unde m are toate valorile până la n. Însă nici o astfel de judecată nu se poate include pe sine în domeniul său propriu pentru că o astfel de judecată este întotdeauna de ordin mai înalt decât judecăţile la care ea se referă.

Să vedem mai departe ce se înţelege prin negaţia unei judecăţi de forma „(x). Φx”. Să observăm mai întâi că „Φx are loc în unele cazuri” sau „Φx are loc uneori” este o judecată care stă pe picior de egalitate cu „Φx are loc în toate cazurile”, sau „Φx are loc întotdeauna”. Judecata „Φx are loc uneori” este adevărată dacă există una sau mai multe valori ale lui x pentru care Φx este adevărată. Vom exprima

[13] A nu se confunda cu „complexe”, care înseamnă cu totul altceva (n. trad.).

propoziția „Φx are loc uneori” cu ajutorul notației „$(\exists x)$. Φx”, unde „$\exists$” stă pentru „există” astfel că întregul simbol poate fi citit „există un x astfel că Φx”. Vom lua cele două genuri de judecăți exprimate prin „(x). Φx” și „$(\exists x)$. Φx” ca idei prime (*primitive ideas*). Luăm, de asemenea, ca idee primă negația unei judecăți *elementare*. Putem defini atunci negațiile lui (x). Φx și $(\exists x)$. Φx. Negația oricărei propoziții p se va nota „$\sim p$”. Negația lui (x). Φx se va defini atunci prin

$$„\sim (\exists x). \sim\Phi x”$$

iar negația lui $(\exists x)$. Φx se va defini prin „$\sim (x). \sim\Phi x$”. Astfel, în limbajul tradițional al logicii formale negația unei judecăți universal afirmative se va defini ca o particular negativă, iar negația unei particulare afirmative ca o universal negativă. Prin urmare, sensul negației în cazul acestor propoziții nu este același cu sensul negației propozițiilor elementare.

O explicație analoagă se va aplica disjuncției. Să luăm propoziția „sau p sau întotdeauna Φx”. Vom nota cu „$p \vee q$”disjuncția a două propoziții p și q. Propoziția noastră va fi atunci „$p. \vee .(x). \Phi x$” .Vom presupune că p este propoziție elementară și că Φx este întotdeauna propoziție elementară. Luăm disjuncția a două propoziții elementare ca idee primă și definim disjucția

$$„p. \vee .(x). \Phi x”.$$

Aceasta poate fi definită prin „$(x). p \vee \Phi x$”. Cu alte cuvinte, „p este adevărată sau Φx este întotdeauna adevărată” este aceeași cu „«p sau Φx» este întotdeauna adevărată”. În mod similar o definim pe

$$„p. \vee .(\exists x). \Phi x”$$

prin „$(\exists x). p \vee \Phi x$”, adică o definim pe „sau p este adevărată sau există un x pentru care Φx este adevărată” prin „există un x pentru care p sau Φx este adevărată”. Tot astfel putem defini disjuncția a două propoziții universale: „$(x). \Phi x. \vee . (y). \Psi y$” va fi definită prin „$(x, y). \Phi x \vee \Psi y$”. Cu alte cuvinte, „sau Φx este întotdeauna adevărată sau Ψy este întotdeauna adevărată” este aceeași cu „«Φx sau Ψy» este întotdeauna adevărată”. Prin această metodă obținem definiții ale disjuncțiilor ce conțin propoziții de forma (x). Φx sau $(\exists x)$. Φx în termenii disjuncțiilor propozițiilor elementare. Însă, pentru propozițiile de forma (x). Φx, $(\exists x)$. Φx, semnificația „disjuncției” nu este aceeași care a fost pentru propozițiile elementare.

Explicații similare pot fi date pentru implicație și conjuncție, deși acestea nu sunt neceare întrucât implicația și conjuncția pot fi definite în termeni de negație și disjuncție.

4. De ce o funcție dată necesită argumente de un anumit tip

Considerațiile aduse în favoarea concepției potrivit căreia o funcție nu poate avea ca argument ceva definit în termenii funcției au fost mai mult sau mai puțin indirecte. O considerație directă asupra tipului de funcții care au ca argumente alte funcții, ca și asupra tipului de funcții care au altceva decât funcții ca argumente, va arăta, dacă nu greșim, că nu este doar imposibil pentru o funcție $\Phi\hat{z}$ să se ia pe sine sau ceva derivat din sine ca argument, ci și că, dacă $\Psi\hat{z}$ este o altă funcție astfel că există argumente *a* pentru care atât „Φa” cât și „Ψa” au sens, atunci nici $\Psi\hat{z}$, nici altceva derivat din ea nu poate fi argument cu sens pentru $\Phi\hat{z}$. Aceasta derivă din faptul că o funcție este în mod esențial o ambiguitate, care, dacă urmează să apară într-o propoziție definită, trebuie să apară de așa manieră încât ambiguitatea să dispară și un enunț complet neambiguu să rezulte. Un mic exemplu va face problema mai clară. Astfel, „$(x).\ \Phi x$”, la care ne-am referit deja, este o funcție de $\Phi\hat{x}$; de îndată ce $\Phi\hat{x}$ este asignată avem o judecată complet definită, lipsită de ambiguitate. Este evident însă că noi nu putem substitui pentru funcție ceva care nu este funcție: „$(x).\ \Phi x$” înseamnă „în toate cazurile are loc Φx” și depinde în semnificația sa de faptul că există „cazuri” ale lui Φx, adică depinde de ambiguitatea caracteristică a unei funcții. Această instanță ilustrează faptul că atunci când o funcție poate fi cu sens argument, ceva care nu este funcție nu poate fi cu sens argument. Și invers, când ceva care nu este funcție poate fi cu sens argument, o funcție nu poate fi cu sens argument. Pentru exemplificare, să o luăm pe „*x* este om” și să o considerăm pe „$\Phi\hat{x}$ este om”. Nimic de aici nu poate elimina ambiguitatea pe care o constituie $\Phi\hat{x}$; nu există nimic definit despre care să se spună că este om. În definitiv, o funcție nu este un obiect definit care să poată fi sau nu om; ea este doar o ambiguitate destinată determinării, pentru a se realiza cu sens ea trebuie să primească determinarea necesară, pe care nu o primește dacă este doar substituită pentru ceva determinat în propoziție[14]. Acest argument nu se aplică totuși în mod direct împotriva unui astfel de enunț cum ar fi „$\{(x).\ \Phi x\}$ este om”. Simțul comun l-ar declara lipsit de sens, însă el nu poate fi condamnat în baza ambiguității subiectului său. Avem nevoie aici de o nouă obiecție, și anume: o judecată nu este o singură entitate, ci o relație între mai multe; de aceea un enunț în care o judecată apare ca subiect va avea sens numai dacă el poate fi redus la un enunț despre termenii judecății. O judecată, asemenea expresiilor „cel care așa-și-așa”, unde în mod gramatical ea apare ca subiect, trebuie despicată (*broken*) în constituienții săi pentru a găsi adevăratul subiect sau adevăratele subiecte. Însă într-un enunț precum „*p* este om”, unde *p* este o propoziție, acest lucru nu este posibil. Prin urmare, „$\{(x).\ \Phi x\}$ este om” este fără sens.

5. Ierarhia funcțiilor și a propozițiilor

Principiul cercului vicios și inspecția directă ne-au dus la concluzia că funcțiile care pot avea ca argument un obiect *a* nu pot fi argumente unele pentru altele și că aceste funcții nu au nici un termen în comun cu funcțiile în care ele ar

[14] Notăm că enunțurile privind semnificația unei propoziții care o conține pe „$\Phi\hat{z}$” se referă la simbolul „$\Phi\hat{z}$” și deci nu cad sub regula potrivit căreia eliminarea ambiguității funcționale este necesară semnificației. Semnificația este o proprietate a semnelor.

putea fi argumente. Suntem conduşi astfel spre construcţia unei ierarhii. Începând cu a şi cu alţi termeni care pot fi argumente de acelaşi fel cu a, ajungem la funcţiile în care a este posibil argument; apoi la funcţiile în care primele funcţii sunt posibile argumente şi aşa mai departe. Însă ierarhia nu este atât de simplă cum pare. Funcţiile care îl pot lua pe a ca argument formează o totalitate ilegitimă şi deci necesită divizarea într-o ierarhie de alte funcţii. Aceasta poate fi urmărită simplu din cele ce urmează. Fie $f(\Phi\hat{z},x)$ o funcţie de două variabile, $\Phi\hat{z}$ şi x. Fixându-l pentru moment pe x şi asertând acest lucru pentru toate valorile posibile ale lui Φ, obţinem propoziţia

$$(\Phi).f(\Phi\hat{z}, x),$$

unde, dacă x este variabilă, avem o funcţie de x; însă, pentru că această funcţie presupune o totalitate de valori relativ la $\Phi\hat{z}$[15], conform principiului cercului vicios funcţia însăşi nu poate fi una dintre valorile totalităţii. Urmează că totalitatea valorilor lui $\Phi\hat{z}$, vizată de $(\Phi).f(\Phi\hat{z}, x)$, nu este totalitatea funcţiilor în care x apare ca argument şi că nu există nici o astfel de totalitate ca aceea a tuturor funcţiilor în care x poate să apară ca argument.

Mai rezultă, conform celor spuse, că funcţia în care $\Phi\hat{z}$ apare ca argument cere ca „$\Phi\hat{z}$”să nu stea pentru orice funcţie de un argument, ea trebuie restricţionată de aşa manieră încât nici una dintre funcţiile care sunt valori posibile pentru „$\Phi\hat{z}$” să nu presupună vreo referinţă la totalitatea acestor funcţii. Să luăm pentru ilustrare definiţia identităţii. Putem încerca să-l definim pe „x este identic cu x” prin „orice este adevărat despre x este adevărat despre y”, adică „Φx întotdeauna implică Φy”. Însă aici, pentru că suntem interesaţi să asertăm toate valorile lui „Φx implică Φy”, văzută ca o funcţie de Φ, vom fi obligaţi să-i impunem lui Φ unele limitări care ne vor feri să includem printre valorile lui Φ valori referitoare la „toate valorile lui Φ”. Astfel, de exemplu, „x este identic cu a” este o funcţie de x; de aceea, dacă ea este o valoare legitimă a lui Φ din „Φx întotdeauna implică Φy”, vom putea infera, cu ajutorul definiţiei de mai sus, că dacă x este identic cu a, şi x este identic cu y, atunci y este identic cu a. Deşi concluzia este valabilă (*sound*), raţionamentul comite eroarea cercului vicios întrucât am luat-o pe „$(\Phi).\ \Phi x$ implică Φa” ca valoare posibilă a lui Φx, ceea ce nu se poate. Dacă impunem totuşi o anumită limitare lui Φ, s-ar putea întâmpla, din câte se pare, ca pentru alte valori Φx să fie adevărată şi Φy falsă, ceea ce ar însemna ca definiţia pe care am dat-o identităţii să fie complet greşită. Această dificultate este evitată prin axioma reductibilităţii despre care va fi vorba mai târziu. Deocamdată, ea este doar invocată în ideea de-a ilustra nevoia ierarhiei funcţiilor de un argument dat şi relevanţa acesteia.

Dăm numele de „a-funcţii” tuturor funcţiilor cu sens pentru un argument a. Să presupunem mai departe că facem o selecţie a a-funcţiilor şi să considerăm

[15] Când vorbim de „valorile lui $\Phi\hat{z}$”, nu z, ci Φ urmează a fi asignat. Când funcţia însăşi este variabilă, este nu doar posibil, ci şi mai simplu să scriem Φ şi nu $\Phi\hat{z}$; cu excepţia cazurilor în care este necesar să se sublinieze că un argument trebuie asignat pentru a asigura semnificaţia.

propoziția „a satisface toate funcțiile ce aparțin selecției în discuție". Dacă îl înlocuim aici pe a cu o variabilă, obținem o a-funcție; însă, conform cu principiul cercului vicios, această a-funcție nu poate fi membru al selecției întrucât se referă la totalitatea selecției. Să luăm selecția ca fiind compusă din toate acele funcții care satisfac $f(\Phi\hat{z})$. Noua funcție va fi

$$(\Phi).\{f(\Phi\hat{z}) \text{ implică } \Phi x\}$$

unde x este argument. Rezultă că, indiferent ce selecție de a-funcții vom face, vor fi alte a-funcții ce cad în afara selecției. Astfel de a-funcții, după cum ilustrează instanțele de mai sus, vor părea întotdeauna funcții de două argumente, $\Phi\hat{z}$ și x, ce aserteză toate sau unele dintre valorile rezultate prin varierea (*varying*) lui Φ. Ceea ce este necesar deci, în vederea evitării cercului vicios, este să despicăm aceste a-funcții în „tipuri", niciun tip neavând voie să conțină funcții care să se refere la totalitatea tipului.

Când ceva este asertat sau negat despre toate valorile posibile ale unei variabile, sau despre unele valori (nedeterminate) ale ei, acea variabilă este numită, după Peano, *variabilă aparentă*. Prezența cuvintelor *toți* și *unii* într-o propoziție indică prezența unei variabile aparente; însă de multe ori o variabilă aparentă este prezentă fără ca limbajul să indice în mod direct prezența ei. De exemplu, „A este muritor" înseamnă „există un moment în care A va muri". O asemenea variabilă a timpului este o variabilă aparentă[16].

Cele mai clare instanțe ale propozițiilor fără variabile aparente sunt cele care exprimă nemijlocit judecăți de percepție, cum ar fi „acesta este roșu" sau „acesta este dureros", unde „acesta" este ceva dat nemijlocit. În alte judecăți, chiar dacă la prima vedere nicio variabilă aparentă nu este prezentă, adeseori se întâmplă să existe una. Cineva poate spune „Socrate este om". Pentru Socrate însuși cuvântul „Socrate" stă pentru un obiect de care el a fost conștient nemijlocit, iar judecata „Socrate este om" nu conține nicio variabilă aparentă. Însă, pentru noi, care îl cunoaștem pe Socrate numai din descripții, cuvântul „Socrate" nu poate însemna același lucru; el înseamnă mai degrabă „persoana având cutare-și-cutare-proprietăți", să zicem „filosoful atenian care a băut cucută". În toate propozițiile despre „cel care cutare-și-cutare" există o variabilă aparentă, după cum se va arăta în cap. III. Prin urmare, în ceeea ce avem noi în minte când spunem „Socrate este om" există o variabilă aparentă, deși în judecata corespunzătoare făcută de Socrate nici o astfel de variabilă aparentă nu există, sub rezerva că ar fi un astfel de lucru precum conștiința nemijlocită de sine.

Indiferent ce ar putea fi instanțele propozițiilor fără variabile aparente, este evident că funcțiile propoziționale ale căror valori nu conțin variabile aparente sunt sursa propozițiilor care conțin variabile aparente, asemenea funcției $\Phi\hat{x}$, sursa propoziției $(x).\Phi x$. Valorile lui $\Phi\hat{x}$ nu conțin variabila aparentă x, ea apare în $(x).\Phi x$.

[16] Exprimarea autorilor este eliptică. Corect ar fi fost „există un moment t în care A va muri", unde t este într-adevăr o variabilă aparentă (n. trad.).

Dacă ele conțin o variabilă aparentă y, aceasta poate fi eliminată asemănător şi aşa mai departe. Acest proces trebuie să ducă la un sfârşit întrucât nicio propoziție pe care noi o putem înțelege nu poate conține mai mult decât un număr finit de variabile aparente, ştiut fiind că ceea ce noi putem înțelege trebuie să fie de o complexitate finită. Ajungem în final la o funcție cu atâtea variabile câți paşi s-au succedat în obținerea ei din propoziția originală, iar această funcție va fi astfel încât valorile ei nu conțin nici o variabilă aparentă. Vom numi această funcție *matricea* propoziției originale şi a oricărei alte propoziții şi funcții obținute prin transformarea unora dintre argumentele funcției în variabile aparente. De exemplu, dacă avem o astfel de funcție-matrice ale cărei valori sunt $\Phi\ (x, y)$[17], vom deriva din ea pe

$(y).\ \Phi\ (x, y)$, care este o funcție de x,
$(x).\ \Phi\ (x, y)$, care este o funcție de y,
$(x, y).\ \Phi\ (x, y)$, care înseamnă „$\Phi\ (x, y)$ este adevărată pentru toate valorile posibile ale lui x şi y".

Aceasta din urmă este o propoziție care nu conține nici o variabilă *reală*, mai exact, nici o variabilă cu excepția variabilelor aparente.

Este clar că toate propozițiile şi funcțiile posibile sunt obținute din matrici prin procesul convertirii argumentelor matricii în variabile aparente. Pentru a despica propozițiile şi funcțiile în tipuri vom porni aşadar de la matrici şi vom urmări cum pot fi despicate ele astfel încât să se evite cercul vicios din definițiile funcțiilor considerate. În acest scop vom folosi litere precum a, b, c, x, y, z, w pentru a denota obiecte care nu sunt nici propoziții, nici funcții. Aceste obiecte vor fi numite indivizi/individuali (*individuals*)[18]. Astfel de obiecte vor fi constituienții propozițiilor sau ai funcțiilor, ele vor fi constituienți *genuini*, în sensul că nu dispar în analiză, cum dispar clasele (de exemplu) sau expresiile de tipul „cel care cutare-şi-cutare".

Primele matrici sunt cele ale căror valori au forma

$$\Phi x,\ \Psi(x, y),\ \chi(x, y, z\ ...),$$

unde argumentele, oricât de multe ar fi ele, sunt numai individuali. Funcțiile Φ, Ψ, χ ..., întrucât (prin definiție) nu conțin variabile aparente, şi nu au alte argumente în afara individualilor, nu presupun vreun fel de totalitate a funcțiilor. Mai departe, pornind de la funcțiile Ψ, χ ..., putem proceda la formarea altor funcții de x, cum ar fi: $(y).\Psi(x, y)$, $(\exists y).\Psi(x, y)$, $(y, z).\Psi(x, y, z)$, (y): $(\exists y).\chi(x, y, z)$ etc. Toate acestea nu presupun nicio totalitate, cu excepția celei a indivizilor/individualilor. Ajungem astfel la o anumită colecție a funcțiilor de x caracterizată prin faptul că nu presupun

[17] Exprimare prolixă, $\Phi\ (x, y)$ este chiar matricea, nu valoarea matricii (n. trad.).

[18] Este vorba de constante şi de variabile individuale. În $(x).\ F(x) \vee F(a)$, de exemplu, apar două variabile – variabila individuală x, care este o variabilă aparentă, şi variabila predicativă F, aceasta fiind o variabilă reală. La rândul lui, a este o constantă individuală. În cele ce urmează, termenul englezesc *individual* va fi tradus prin *individ* şi *individual* pe care i-am luat ca echivalenți (n. trad.).

altfel de variabile decât variabilele individuale. Aceste funcţii se vor numi „funcţii de *ordinul întâi*”[19].

Introducem acum o notaţie pentru a exprima „orice funcţie de ordinul întâi”. Vom nota orice funcţie de ordinul întâi cu „$\Phi!\hat{x}$”. Astfel „$\Phi!\hat{x}$” stă pentru orice valoare a oricărei funcţii ce nu presupune alte variabile cu excepţia variabilelor individuale. Se va vedea că „$\Phi!\hat{x}$” este ea însăşi o funcţie de două variabile, şi anume, $\Phi!\hat{z}$ şi x. Astfel, $\Phi!x$ presupune o variabilă care nu este individuală, şi anume, $\Phi!\hat{z}$. Similar, „$(x).\ \Phi!\hat{x}$” este o funcţie de variabilă $\Phi!\hat{z}$ ce presupune o altă variabilă decât una individuală. De asemenea, dacă a este un individual dat

„$\Phi!x$ implică $\Phi!a$, pentru toate valorile posibile ale lui Φ”

este o funcţie de x, însă nu una de forma $\Phi!x$ din cauză că implică o variabilă (aparentă) Φ care nu este un individual. Să dăm numele de „predicat” oricărei funcţii de ordinul întâi $\Phi!\hat{x}$. (Cuvântul „predicat” este propus doar în interesul prezentei discuţii.) În felul acesta, enunţul „$\Phi!x$ implică $\Phi!a$ pentru toate valorile lui Φ” poate fi citit „toate predicatele lui x sunt predicatele lui a”. Acesta face o enunţare despre x, fără a-i atribui lui x un predicat în sensul special definit.

Datorită introducerii variabilei funcţionale de ordinul întâi $\Phi!\hat{z}$, avem acum un nou set de matrici. Astfel, „$\Phi!x$” este o funcţie care nu conţine nicio variabilă aparentă, ea conţine două variabile reale, $\Phi!\hat{z}$ şi x. (Trebuie observat că, dacă Φ este asignat, putem obţine o funcţie ale cărei valori presupun indivizi ca variabile aparente, de exemplu dacă $\Phi!x$ este $(y).\ \Psi(x, y)$. Însă, dacă Φ este variabilă, $\Phi!x$, nu conţine nicio variabilă aparentă.) Din nou, dacă a este un individual definit , $\Phi!a$ este o funcţie de o variabilă, $\Phi!\hat{z}$. Dacă a şi b sunt individuali definiţi, „$\Phi!a$ implică $\Psi!b$” este o funcţie de două variabile, $\Phi!\hat{z}$ şi $\Psi!\hat{z}$, şi aşa mai departe. Am ajuns astfel la o întreagă mulţime de noi matrici:

$$f(\Phi!\hat{z}),\ g(\Phi!\hat{z}, \Psi!\hat{z}),\ F(\Phi!\hat{z}, x) \text{ etc.}$$

Aceste matrici conţin ca argumente individuali şi funcţii de ordinul întâi, însă, ca toate matricile, ele nu conţin nicio variabilă aparentă. Orice astfel de matrice, dacă conţine mai mult de o variabilă, dă naştere la noi funcţii de o variabilă prin convertirea tuturor argumentelor ei, cu excepţia unuia, în variabile aparente. Obţinem în felul acesta funcţiile

$(\Phi).g(\Phi!\hat{z}, \Psi!\hat{z})$, care este o funcţie de $\Psi!\hat{z}$.
$(x).\ F(\Phi!\hat{z}, x)$, care este o funcţie de $\Phi!\hat{z}$.
$(\Phi).F(\Phi!\hat{z}, x)$, care este o funcţie de x.

[19] Autorii introduc (neanunţat) noţiunea de *ordin*. Distincţia dintre ierarhia tipurilor şi cea a ordinelor nu este foarte clară. B. Russell, autorul *de facto* al teoriei tipurilor, revine în mai multe rânduri asupra subiectului adăugând de fiecare dată nuanţe şi idei noi. În general, tipul se referă la domeniul valorilor, el este clasa argumentelor pentru care funcţia are sens. În cadrul fiecărui tip se disting mai multe ordine ierarhizate de la 1 la n (cu n finit). Ordinele, la fel ca tipurile, se divid în *predicative* şi *nepredicative*. Din păcate, textul nu face o diferenţiere clară a tipurilor şi a ordinelor, adeseori tipul se confundă cu ordinul (n. trad.).

Vom da numele de *matrici de ordinul doi* acestor matrici care au funcții de ordinul întâi ca argumente şi nu conțin nici un alt argument cu excepția funcțiilor de ordinul întâi şi a indivizilor (nu este necesar să aibă indivizi printre argumente). Vom da numele de *funcții de ordinul doi* funcțiilor care fie sunt matrici de ordinul doi, fie sunt derivate din astfel de matrici prin transformarea unora dintre argumente în variabile aparente. Se va vedea că poate fi argumentul unei funcții de ordinul doi fie un individ, fie o funcție de ordinul întâi. Funcțiile de ordinul doi conțin variabile care sunt funcții de ordinul întâi şi nu conțin alte variabile cu excepția variabilelor individuale.

Avem acum la dispoziție noi clase de funcții. În primul rând, avem funcțiile de ordinul doi care au ca argument o funcție de ordinul întâi. Vom nota o variabilă funcțională de acest gen cu $f\,!(\hat{\Phi}\,!\,\hat{z})$ şi orice valoare a unei astfel de funcții cu $f\,!(\Phi!\,\hat{z})$. Asemenea lui $\Phi!x$, funcția $f\,!(\Phi!\,\hat{z})$ este o funcție de două variabile, şi anume, $f\,!(\hat{\Phi}\,!\,\hat{z})$ şi $\Phi!\,\hat{z}$. Printre posibilele valori ale lui $f\,!(\hat{\Phi}\,!\,\hat{z})$ vor fi: $\Phi!a$ (unde a este o constantă), $(x).\Phi!x$, $(\exists x).\Phi!x$ etc. (Acestea rezultă din asignarea unei valori pentru f, fără asignarea lui Φ.) Vom numi aceste funcții, „funcții predicative de ordinul întâi".

În al doilea rând avem funcții de ordinul doi de două argumente, dintre care unul este o funcție de ordinul întâi, iar celălalt un individual. Notăm valorile nedeterminate ale unei astfel de funcții cu

$$f\,!(\Phi!\,\hat{z}\,,x).$$

De îndată ce x este asignat, vom avea o funcție predicativă de $\Phi!\,\hat{z}$. Dacă funcția noastră nu conține nici o funcție de ordinul întâi ca variabilă aparentă, vom obține o funcție predicativă de x dacă îi asignăm o valoare lui $\Phi!\,\hat{z}$. Astfel, pentru a lua cel mai simplu caz posibil, dacă $f\,!(\Phi!\,\hat{z}\,,x)$ este $\Phi!x$, asignarea unei valori lui Φ ne dă o funcție predicativă de x în virtutea definiției lui „$\Phi!x$". Însă, dacă $f\,!(\Phi!\,\hat{z}\,,x)$ conține o funcție de ordinul întâi ca variabilă aparentă, asignarea unei valori lui $\Phi!\,\hat{z}$ ne dă o funcție de ordinul doi de x.

În al treilea rând, avem funcțiile de ordinul doi de indivizi. Acestea vor fi derivate din funcțiile de forma $f\,!(\Phi!\,\hat{z}\,,x)$ prin transformarea lui Φ în variabilă aparentă. Prin urmare, nu vom avea nevoie de un nou simbol pentru ea.

Avem, de asemenea, funcții de ordinul doi de două funcții de ordinul întâi, sau de două astfel de funcții şi un individual şi aşa mai departe.

În exact aceeaşi manieră putem proceda cu matricile de ordinul trei, care vor fi funcții ce conțin funcții de ordinul doi ca argumente şi nu conțin nici o variabilă aparentă şi nici un argument cu excepția individualilor şi a funcțiilor de ordinul întâi şi de ordinul doi. De aici, procedând ca mai înainte, putem ajunge la funcțiile de ordinul trei; şi tot astfel putem proceda mai departe, indefinit. Dacă cel mai mare ordin al variabilei ce apare într-o funcție, fie ca argument, fie ca variabilă aparentă, este o funcție de ordinul n, atunci funcția în care apare ea este de ordinul $n + 1$. Nu vom ajunge la funcții de ordin infinit din cauză că numărul de argumente şi de variabile aparente dintr-o funcţie trebuie să fie finit, şi deci orice funcţie trebuie să fie de ordin finit. Întrucât ordinele funcţiilor sunt definite numai pas cu pas, nu poate fi nici un proces de „trecere la limită”, deci nu pot să apară funcţii de ordin infinit.

Vom spune că o funcţie de o variabilă este *predicativă* dacă este de ordin imediat următor (superior) ordinului argumentului ei; adică de cel mai mic ordin compatibil cu acest argument. Dacă o funcţie are mai multe argumente şi cel mai mare ordin al funcţiilor ce apar printre argumentele ei este n, vom numi funcţia predicativă dacă are ordinul $n + 1$; adică are cel mai mic ordin compatibil cu argumentele ei. O funcţie de mai multe argumente este predicativă dacă printre argumentele ei există unul astfel încât, când celelalte argumente sunt asignate, obţinem o funcţie predicativă de un argument nedeterminat.

Este important de observat că toate funcţiile posibile din ierarhia de mai sus pot fi obţinute cu ajutorul funcţiilor predicative şi a variabilelor aparente. Astfel, după cum am văzut, funcţiile de ordinul doi de un individual x sunt de forma

$$(\Phi).\, f!(\Phi!\,\hat{z}\,, x) \text{ sau } (\exists\Phi).\, f!(\Phi!\,\hat{z}\,, x) \text{ sau } (\Phi, \Psi).\, f!(\Phi!\,\hat{z}\,, \Psi!\,\hat{z}\,, x) \text{ etc.}$$

unde f este o funcţie predicativă de ordinul doi. În general, o funcţie nepredicativă de ordin n se obţine dintr-o funcţie predicativă de ordinul n prin transformarea tuturor argumentelor ei de ordinul $n - 1$ în variabile aparente. (Alte argumente de asemenea pot fi transformate în variabile aparente.) În felul acesta nu avem nevoie să introducem orice funcţii ca variabile, cu excepţia funcţiilor predicative. Mai mult, pentru a obţine orice funcţie de o variabilă x nu este nevoie să trecem dincolo de o funcţie predicativă de două variabile. Este cazul funcţiei $(\Psi).\, f!\, (\Phi!\,\hat{z}\,, \Psi!\,\hat{z}\,, x)$, unde f este o funcţie dată de $\Phi!\,\hat{z}$ şi x, şi este predicativă. Astfel, ea este de forma $F!(\, \Phi!\,\hat{z}\,, x)$, iar $(\Phi, \Psi).\, f!(\Phi!\,\hat{z}\,, \Psi!\,\hat{z}\,, x)$ este de forma $(\Phi).\, F!(\Phi!\,\hat{z}\,, x)$. În general, printr-o succesiune de paşi noi găsim că, dacă $\Phi!\,\hat{u}$ este o funcţie predicativă de ordin suficient de mare, orice asignare a lui x cu o funcţie nepredicativă va avea una din cele două forme

$$(\Phi).\, F!(\Phi!\,\hat{u}\,, x),\ (\exists\Phi).\, F!(\Phi!\,\hat{u}\,, x)$$

unde F este o funcţie predicativă de $\Phi!\,\hat{u}$ şi x.

Natura ierarhiei de mai sus a funcţiilor poate fi reformulată după cum urmează. O funcţie, aşa cum s-a văzut încă de la început, presupune ca parte a semnificaţiei sale totalitatea valorilor sale sau, ceea ce este acelaşi lucru, totalitatea argumentelor sale posibile. Argumentele unei funcţii pot fi funcţii, propoziţii sau individuali. (Ne reamintim că individualul a fost definit ca ceva ce nu este nici propoziţie, nici funcţie.) Facem pentru moment abstracţie de cazul în care argumentul funcţiei este o propoziţie. Să considerăm o funcţie al cărei argument este un individual. Această funcţie presupune totalitatea individualilor; însă, dacă ea nu conţine funcţii ca variabile aparente, ea nu presupune nici o totalitate de funcţii. Dacă totuşi ea conţine o funcţie ca variabilă aparentă, ea nu poate fi definită până când o anume totalitate de funcţii nu a fost definită. Urmează că noi trebuie să definim mai întâi totalitatea acestor funcții care au individuali ca argumente şi care nu conțin nici o funcție ca variabilă aparentă. Acestea sunt funcțiile *predicative* de individuali. În general, o funcție predicativă de un argument variabil este o funcție care nu presupune nici o totalitate, cu excepția celei a valorilor posibile ale argumentului şi a celor ce sunt presupuse de fiecare dintre argumentele posibile. Astfel, o funcție predicativă de un argument variabil este orice funcție ce poate fi specificată fără a introduce noi tipuri de variabile, acestea nu sunt necesar presupuse de variabila argument.

Un tratament analog poate fi aplicat propozițiilor. Pot fi numite *propoziții elementare* propozițiile care nu conțin nici o funcție şi nici o variabilă aparentă. Propozițiile neelementare, care nu conțin funcții, nici variabile aparente, cu excepția individualilor, pot fi numite propoziții de ordinul întâi. (A se observa că nici o variabilă, cu excepția variabilelor *aparente*, nu poate interveni într-o propoziție, întrucât orice conține o variabilă *reală* este o funcție, nu o propoziție.) În felul acesta, propozițiile elementare şi propozițiile de ordinul întâi sunt valori ale funcțiilor de ordinul întâi. (Să ne reamintim că o funcție nu este un constituient al vreuneia dintre variabilele sale: funcția „$\hat{x}$ este om”, de exemplu, nu este un constituient al propoziției „Socrate este om”). Propozițiile elementare, ca şi propozițiile de ordinul întâi, nu presupun nici o totalitate, cu excepția (cel mult) a totalității individualilor. Ele au una sau alta din formele

$$\Phi!x;\ (\mathrm{x}).\ \Phi!x;\ (\exists x).\ \Phi!x$$

unde $\Phi!x$ este o funcție predicativă de un individual. Urmează că, dacă p reprezintă o variabilă de propoziție elementară sau o variabilă de propoziție de ordinul întâi, atunci, o funcție fp este fie $f(\Phi!x)$, fie $f\{(x).\Phi!x\}$, fie $f\{(\exists x).\Phi!x\}$. Astfel, o funcție de o propoziție elementară sau de o propoziție de ordinul întâi poate fi întotdeauna redusă la o funcție de funcție de ordinul întâi. Urmează că o propoziție ce presupune totalitatea unei propoziții de ordinul întâi poate fi redusă la una ce presupune totalitatea unei funcții de ordinul întâi; evident, acest lucru se aplică în mod egal şi ordinelor superioare. Ierarhia propozițională poate fi aşadar derivată din ierarhia funcțională, deci putem defini o propoziție de ordinul n ca fiind una ce presupune o variabilă aparentă de ordin $n - 1$ din ierarhia funcțională. Ierarhia propozițională nu este niciodată cerută în practică, ea este relevantă doar pentru soluționarea paradoxurilor; de aceea nu este necesar să intrăm în alte detalii privind tipul propozițiilor.

6. Axioma reductibilității

Rămâne să discutăm acum despre axioma reductibilității[20]. Se va vedea că, în conformitate cu ierarhia de mai sus, nici un enunț nu poate fi cu sens despre „toate

[20] Mult discutata axiomă a reductibilității a stârnit de la început controverse. În *Introducerea* sa la ediția a doua a *Principiei* (1925–27), Russell renunță la axiomă considerând-o nenecesară. „Această axiomă, spune el, are o justificare pur pragmatică (conduce la rezultatele dorite şi la nimic altceva). În niciun caz însă ea nu este genul de axiomă cu care să putem rămâne mulțumiți. Relativ la acest subiect nu se poate spune totuşi că s-ar fi obținut o soluție satisfăcătoare” (B. Russell , *Introduction to the Second Edition*, *Princ. Math.*, ed. 2-a, p. XIV) (n. trad.).

a-funcțiile", unde *a* este un obiect dat. Prin urmare, o astfel de noțiune ca „toate proprietățile lui *a*", care înseamnă „toate funcțiile adevărate pentru argumentul *a*", este ilegitimă. Va trebui să distingem ordinul funcțiilor considerate. Putem spune: „toate proprietățile predicative ale lui *a*", „toate proprietățile de ordinul doi ale lui *a*" şi aşa mai departe. (Dacă *a* nu este un individual, ci un obiect de ordinul *n*, „proprietățile de ordinul doi ale lui *a*" înseamnă „funcțiile de ordin $n + 2$ satisfăcute de *a*".) Nu putem vorbi însă despre „toate proprietățile lui *a*". Putem vedea, în schimb, că în anumite cazuri unele enunțuri au loc despre „toate proprietățile de ordinul *n* ale lui *a*", indiferent ce valoare ar avea *n*. În astfel de cazuri, nici o dificultate practică nu rezultă din faptul că luăm enunțul ca fiind despre „toate proprietățile lui *a*", cu condiția să ne reamintim că în realitate el este un număr de enunțuri şi nu unul singur ce ar putea fi privit ca referindu-se la o altă proprietate a lui *a*, deasupra şi dincolo de toate proprietățile. Astfel de cazuri presupun întotdeauna o anume ambiguitate sistematică, ca cea presupusă de semnificația cuvântului „adevăr" explicată ceva mai devreme. Datorită acestei ambiguități sistematice, este posibil uneori să combinăm într-un singur enunț verbal un număr de mai multe enunțuri diferite, corespunzător diferitelor ordine ale ierarhiei. Acest lucru este ilustrat de cazul mincinosului, unde enunțul „toate *A*-enunțurile sunt false" ar trebui despicat în diferite enunțuri referitoare la enunțurile sale de diferite ordine atribuind fiecăruia genul corespunzător de fals.

Axioma reductibilității este introdusă cu scopul de a legitima un mare număr de raționamente în care intervin astfel de noțiuni precum „toate proprietățile lui *a*" sau „toate *a*-funcțiile", pe care cu greu le suspectăm că ar ascunde vreo eroare substanțială. În vederea formulării axiomei, trebuie să arătăm mai întâi ce se înțelege prin „echivalență formală". Două funcții $\Phi\hat{x}$, $\Psi\hat{x}$ sunt „formal echivalente" când, pentru orice argument posibil *x*, $\Phi\hat{x}$ este echivalentă cu $\Psi\hat{x}$; adică $\Phi\hat{x}$ şi $\Psi\hat{x}$ sunt fie împreună adevărate, fie împreună false. Cu alte cuvinte, două funcții sunt formal echivalente când sunt satisfăcute de aceeaşi mulțime de argumente. Axioma reductibilității este presupunerea (*assumtion*) că, dată fiind o funcție oarecare $\Phi\hat{x}$, există o funcție predicativă formal echivalentă cu ea; adică există o funcție predicativă care este adevărată când $\Phi\hat{x}$ este adevărată şi falsă, când $\Phi\hat{x}$ este falsă. În simboluri, axioma se redă prin

$$\vdash : (\exists\Psi) : \Phi x . \equiv_x . \Psi ! x$$

Pentru două variabile se cere o axiomă similară, şi anume: dată fiind orice funcție $\Phi(\hat{x}, \hat{y})$, există o funcție predicativă formal echivalentă; adică

$$\vdash : (\exists\Psi) : \Phi\,(x, y) . \equiv_{x, y} . \Psi !\,(x, y)$$

Pentru a explica scopul axiomei reductibilității şi rațiunea adevărului ei, o vom ilustra aplicând-o unor cazuri particulare.

Dacă numim *predicat* al unui obiect o funcție predicativă adevărată pentru acest obiect, atunci predicatele unui obiect sunt numai unele dintre proprietățile lui.

Să luăm ca exemplu propoziția „Napoleon are toate calitățile unui mare general". Putem interpreta aceasta prin „Napoleon are toate predicatele unui mare general". Există aici o variabilă care este o variabilă aparentă. Dacă folosim „$f\,(\Phi!\,\hat{z}\,)$" pentru „$\Phi!\,\hat{z}$ este un predicat al unui mare general", propoziția noastră va deveni

$$(\Phi) : f\,(\Phi!\,\hat{z}\,) \text{ implică } \Phi! \text{ (Napoleon)}$$

Întrucât aceasta se referă la o totalitate de predicate, ea însăşi nu este un predicat al lui Napoleon. Totuşi, nu rezultă de nicăieri că n-ar exista un predicat comun şi specific unui mare general. De fapt, este sigur că un asemenea predicat există. Pentru că numărul marilor generali este finit şi fiecare dintre ei are anumite predicate pe care nu le are nici o altă ființă umană (cum ar fi, de pildă, data exactă a naşterii). Disjuncția unor astfel de predicate va constitui un predicat comun şi specific unui mare general[21]. Dacă notăm acest predicat cu $\Psi!\,\hat{z}$, enunțul despre Napoleon este echivalent cu $\Psi!$ (Napoleon). Şi această echivalență are loc în mod egal dacă îl înlocuim pe Napoleon cu orice alt individual. Am ajuns astfel la un predicat care este întotdeauna echivalent cu proprietatea atribuită lui Napoleon, cu alte cuvinte, el aparține acelor obiecte care au această proprietate şi nu altora. Axioma reductibilității stabileşte că un astfel de predicat întotdeauna există, că orice proprietate a unui obiect aparține aceleiaşi colecții de obiecte ca acelea ce posedă unele predicate.

Putem ilustra în continuare principiul nostru prin aplicarea lui la *identitate*. În această aplicație, el are unele afinități cu identitatea indiscernabililor la Leibniz. Este clar că, dacă x şi y sunt identici, şi Φx este adevărată, atunci Φy este adevărată. Aici nu contează ce fel de funcție poate fi $\Phi\,\hat{x}$: enunțul trebuie să aibă loc pentru *orice* funcție. Însă nu putem spune şi invers: „dacă Φx implică Φy, pentru toate valorile lui Φ, atunci x şi y sunt identici"; pentru că „toate valorile lui Φ" este inadmisibilă. Dacă vrem să vorbim despre „toate valorile lui Φ", va trebui să ne limităm la funcțiile unui ordin. L-am putea restrânge pe Φ la predicate sau la funcții de ordinul doi, sau la funcții de orice ordin dorim. În mod necesar însă va trebui să excludem funcțiile de toate ordinele în favoarea unuia singur. În felul acesta vom obține, ca să spunem aşa, o ierarhie de diferite grade ale identității. Putem spune: „toate predicatele lui x îi aparțin lui y" „toate proprietățile de ordinul doi ale x îi aparțin lui y", şi aşa mai departe. Fiecare dintre aceste enunțuri implică toți predecesorii săi: de exemplu, dacă toate proprietățile de ordinul doi ale lui x îi aparțin lui y, atunci toate predicatele lui x îi aparțin lui y, pentru că a avea toate predicatele lui x este o proprietate de ordinul doi, şi această proprietate îi aparține lui x. Însă noi nu putem, fără ajutorul unei axiome, să argumentăm contrariul, şi anume, că dacă toate predicatele lui x îi aparțin lui y, atunci toate proprietățile de ordinul doi ale lui x trebuie de asemenea să îi aparțină lui y. Astfel, nu putem fi

[21] Când o mulțime (finită) de predicate este dată printr-o enumerare, disjuncția lor este un predicat din cauză că nici un predicat nu apare în disjuncție ca variabilă aparentă.

siguri, fără ajutorul unei axiome, că *x* şi *y* sunt identici dacă au aceleaşi predicate. Identitatea indiscernabililor, la Leibniz, suplineşte această axiomă. Trebuie observat că prin „indiscernabili" el nu putea înțelege două obiecte care îşi corespund în *toate* proprietățile, pentru că una dintre proprietățile lui *x* este aceea de-a fi identic cu *x* şi deci această proprietate i-ar aparține în mod necesar lui *y* dacă *x* şi *y* îşi corespund în toate proprietățile. O limitare a proprietăților comune necesare indiscernabilității lucrurilor este deci implicată de necesitatea unei axiome. În scopul ilustrării (şi nu a interpretării lui Leibniz) putem presupune că proprietățile comune cerute de indiscernabilitate sunt limitate la predicate. Atunci, identitatea indiscernabililor va stabili că dacă *x* şi *y* îşi corespund în toate predicatele lor, ei sunt identici. Acest lucru poate fi demonstrat dacă ne asumăm axioma reductibilității. Pentru că, în acest caz, orice proprietate aparține aceleiaşi colecții de obiecte cu cea definită printr-un anumit predicat. Există, de aceea, anumite predicate comune şi specifice obiectelor identice cu un obiect *x*. Aceste predicate îi aparțin lui *x* întrucât *x* este identic cu el însuşi; ele îi aparțin de aceea lui *y* întrucât *y* are toate predicatele lui *x*; de aceea *y* este identic cu *x*. Urmează că îi putem defini pe *x* şi *y* ca identici când toate predicatele lui *x* îi aparțin lui *y*, altfel spus, când $(\Phi)\colon \Phi!x\ .\supset .\ \Phi!y$. Adoptăm, în consecință, următoarea definiție a identității[22]:

$$\mathrm{x = y\ .=:} (\Phi)\colon \Phi!x\ .\supset .\ \Phi!y \ \mathrm{Df.}$$

Însă în absența axiomei reductibilității sau a unei axiome echivalente în acest context, am fi obligați să privim identitatea ca indefinibilă şi să admitem (ceea ce pare imposibil) că două obiecte pot avea toate proprietățile în comun fără să fie identice.

Axioma reductibilității este chiar mai esențială în teoria claselor. În primul rând, trebuie observat că dacă presupunem existența claselor, axioma reductibilității poate fi demonstrată. Pentru că, în acest caz, dată fiind orice funcție $\Phi\hat{z}$, indiferent de ordin, există o clasă α constând din exact acele obiecte care satisfac $\Phi\hat{z}$. De aceea, „Φx" este echivalentă cu „*x* aparține lui α". Însă „*x* aparține lui α" este o propoziție ce nu conține nici o variabilă aparentă şi este deci o funcție predicativă de *x*. Prin urmare, dacă presupunem existența claselor, axioma reductibilității devine nenecesară. Asumarea axiomei reductibilității este deci o asumare mai slabă decât asumarea existenței claselor. Aceasta din urmă a fost făcută până acum fără ezitare. Totuşi, în baza contradicțiilor[23], care necesită un tratament mult mai complicat în ipoteza asumării claselor, precum şi a faptului că întotdeauna este recomandat să facem asumarea cea mai simplă în demonstrarea teoremelor, preferăm asumarea axiomei reductibilității mai degrabă decât pe cea a existenței claselor[24]. Însă, pentru

[22] De notat că în această definiție al doilea semn al identității trebuie luat în combinație cu „Df" pentru a forma un singur simbol. Ceea ce este definit aici este semnul egalității neurmat de literele „Df".

[23] A se citi *paradoxurilor* (n. trad.).

[24] Clasele şi descripțiile sunt la Russell „simboluri incomplete", ele nu au existență în sine, ci numai în context (n. trad.).

a explica utilizarea axiomei în problema claselor, este necesar să explicăm mai întâi teoria claselor, care este o temă a capitolului III. Vom amâna deci pentru acest capitol explicarea axiomei noastre cu aplicare la chestiunea claselor.

Trebuie spus că toate rezultatele deservite de axioma reductibilității sunt la fel de bine deservite de ipoteza că există întotdeauna o funcție de ordin *n* (cu *n* determinat) formal echivalentă cu $\Phi\hat{x}$, oricare ar fi ordinul lui $\Phi\hat{x}$. Înțelegem aici prin „funcție de ordin *n*” o funcție de ordin *n* relativă la argumentele lui $\Phi\hat{x}$. Astfel, dacă aceste argumente sunt în mod absolut de ordinul *m*, noi asumăm existența unei funcții formal echivalentă cu $\Phi\hat{x}$ al cărui ordin absolut este $m + n$. Axioma reductibilității, în forma asumată mai sus, corespunde cazului $n = 1$, însă acesta nu este necesar utilizării axiomei. De asemenea, nu este necesar ca *n* să fie același pentru diferitele valori ale lui *m*; tot ce se cere este ca *n* să fie constant cât timp *m* este constant. Se impune ca, dacă sunt vizate funcții extensionale de funcții, să putem opera cu orice *a*-funcție prin intermediul unor funcții formal echivalente de un tip dat, astfel încât să putem obține rezultate care altfel ar necesita noțiunea ilegitimă de „toate *a*-funcțiile”; însă nu contează care este tipul dat. Totuși, nu rezultă că axioma reductibilității devine sensibil mai plauzibilă pusă în forma de mai sus, mai generală, dar şi mai complicată.

Axioma reductibilității este echivalentă asumției că „orice combinație sau disjuncție de predicate[25] este echivalentă cu un singur predicat”, adică asumției că dacă asertăm că *x* are toate predicatele ce satisfac o funcție $f(\Phi!\hat{z})$, există un predicat pe care *x* îl va avea ori de câte ori aserțiunea noastră este adevărată şi nu îl va avea când este falsă, şi la fel dacă asertăm că *x* are un predicat ce satisface funcția $f(\Phi!\hat{z})$. Pentru că, prin această asumare, ordinul unei funcții nepredicative poate fi redus cu unu; prin urmare, după un număr finit de paşi vom putea ajunge de la orice funcție nepredicativă la o funcție predicativă formal echivalentă. Este puțin probabil ca asumția de mai sus să poată fi substituită axiomei reductibilității în deducțiile simbolice, întrucât folosirea ei aici ar necesita introducerea explicită a unei alte asumții care să ne permită să ajungem, după un număr finit de paşi, de la orice funcție la o funcție predicativă, iar această asumție nu poate fi făcută fără dezvoltări dificile chiar într-un stadiu incipient. Însă, în baza celor spuse, este clar că dacă axioma alternativă de mai sus este adevărată, la fel de adevărată este axioma reductibilității. Conversa, care completează demonstrația de echivalență, este evident adevărată.

7. Rațiunile acceptării axiomei reductibilității

Propoziția că axioma reductibilității este autoevidentă cu greu poate fi susținută. Însă autoevidența nu este nimic altceva decât o parte a rațiunii privind

[25] Combinația sau disjuncția este presupusă aici ca fiind dată intensional. Dacă este dată extensional (adică prin enumerare), nu este cerută nici o asumție; în acest caz, însă, numărul predicatelor vizate trebuie să fie finit.

acceptarea unei axiome, niciodată indispensabilă. Rațiunea acceptării unei axiome, ca şi a acceptării oricărei alte propoziții, este întotdeauna larg inductivă, aceasta însemnând că multe propoziții indubitabile la prima vedere pot fi deduse din ea şi că nicio altă cale la fel de plauzibilă nu este cunoscută astfel încât aceste propoziții să poată fi adevărate dacă axioma a fost falsă, şi că nimic probabil fals nu poate fi dedus din ea. Dacă axioma este în mod aparent autoevidentă, aceasta înseamnă că ea este doar la prima vedere indubitabilă; că lucrurile au fost gândite ca autoevidente dar s-au dovedit până la urmă a fi false. Iar dacă axioma însăşi este la prima vedere indubitabilă, aceasta doar se adaugă evidenței inductive derivată din faptul că toate consecințele ei sunt indubitabile la prima vedere: ea nu realizează o nouă evidență de un fel radical diferit. Infailibilitatea nu este niciodată realizabilă şi deci un element de îndoială va fi întotdeauna asociat unei axiome şi consecințelor ei. În logica formală, elementul de îndoială este întodeauna mai redus decât în alte ştiințe, însă el nu este absent, după cum o arată paradoxurile rezultate din premise care nu au fost cunoscute anterior ca presupunând limitări. În cazul axiomei reductibilității, evidența inductivă în favoarea ei este foarte puternică, dat fiind că raționamentele pe care le permite, ca şi rezultatele la care conduce ea, sunt toate de aşa fel încât par a fi valide. Şi cu toate că este puțin probabil ca axioma să se dovedească falsă, nu este total exclus ca ea să fie deductibilă din alte axiome mai fundamentale şi mai evidente. Este posibil ca folosirea principiul cercului vicios, încorporat în ierarhia tipurilor, să fie mai drastică decât se cere şi că printr-o utilizare mai puțin drastică a lui, necesitatea axiomei reductibilității să poată fi evitată. Astfel de schimbări nu vor face totuşi false ceea ce s-a asertat în baza principiilor explicate mai sus: ele pot face doar mai uşoare demonstrațiile aceloraşi teoreme. Pare deci a fi lipsită de fundament temerea că axioma reductibilității ne poate induce în eroare.

8. Contradicțiile

Suntem acum în situația de-a arăta cum contribuie teoria tipurilor la soluționarea contradicțiilor care au asaltat logica matematică[26]. În acest scop, vom începe prin a enumera câteva dintre cele mai importante şi mai ilustrative contradicții, după care vom arăta că toate comit eroarea cercului vicios şi deci toate sunt evitate prin teoria tipurilor[27]. De notat că aceste paradoxuri nu se leagă în mod exclusiv de ideea de număr şi de cantitate. Prin urmare, nici o soluție care încearcă să le explice

[26] Ultimul paragraf este dedicat soluționării paradoxurilor. Autorii folosesc termenul „contradicție" în locul celui de „paradox" cu toate că termenii nu se suprapun exact. Alături de contradicția paradoxală, mai pot fi invocate şi alte specii de contradicții logice, cum ar fi contradicția paralogistică, de exemplu, sau cea sofistică, fiecare cu specificul şi cu problemele ei (n. trad.).

[27] O interesantă diferență apare acum între ideea *rezolvării* paradoxurilor şi cea a *evitării* lor. Aşa cum înțeleg eu lucrurile, *rezolvarea* presupune existența efectivă a paradoxurilor, în timp ce *evitarea* nu, sau nu neapărat. Spre deosebire de evitare, rezolvarea este o operațiune *post factum*, ea acționează doar asupra paradoxurilor existente, spre deosebire evitare unde o asemenea existență nu este necesară (n. trad.).

doar prin folosirea ilegitimă a acestor idei nu poate fi adecvată. Soluția trebuie căutată în astfel de cercetări ale ideilor logice fundamentale, precum cele încercate în paginile anterioare.

(1) Cea mai veche contradicție din categoria celor vizate este cea a lui *Epimenide*. Cretanul Epimenide a spus că toți cretanii au fost mincinoşi şi că toate enunțurile făcute de cretani au fost cu certitudine minciuni. A fost aceasta o minciună? Cea mai simplă formă a acestei contradicții este produsă de cineva care spune „eu mint”; dacă minte, el spune adevărul, şi invers.

(2) Fie w clasa tuturor claselor care nu sunt proprii lor membri[28]. Atunci, „x este un w” este echivalentă cu „x nu este un x”, oricare ar fi clasa x. Dându-i lui x valoarea w, propoziția „w este un w” devine echivalentă cu „w nu este un w”.

(3) Fie T relația dintre două relații R şi S când R nu este în relația R cu S. Atunci, „R este în relația T cu S” este echivalentă cu „R nu este în relația T cu S”, oricare ar fi relațiile R şi S. Dând valoarea T atât lui R cât şi lui S, obținem „T este în relația T cu T”, echivalentă cu „T nu este în relația T cu T”.

(4) Contradicția lui Burali-Forti poate fi prezentată după cum urmează. Se poate arăta că orice serie bine ordonată are un număr ordinal, că seriile de ordinale până la un ordinal dat depăşesc cu unu ordinalul dat şi că (în baza unor ipoteze foarte naturale) seria tuturor ordinalelor este bine ordonată (în ordinea mărimii). Înseamnă că seria tuturor ordinalelor are un număr ordinal, să zicem Ω. Însă, în acest caz, seria tuturor ordinalelor, inclusiv Ω, are numărul ordinal $\Omega + 1$, care trebuie să fie mai mare decât Ω. De aceea, Ω nu este numărul ordinal al tuturor ordinalilor.

(5) Numărul silabelor din numele româneşti (în orig. englezeşti) ale întregilor finiți tinde să crească pe măsură ce numerele cresc, şi trebuie să crească gradual întrucât numai un număr finit de nume poate fi făcut cu un număr finit de silabe. Aşa stând lucrurile, numele unor întregi trebuie să constea din cel puțin nouăsprezece silabe, iar dintre acestea unul trebuie să fie cel mai mic. Prin urmare, „cel mai mic număr ce nu poate fi numit în mai puțin de nouăsprezece silabe” trebuie să denote un întreg finit; în fapt, el denotă numărul 111.777. Însă „cel mai mic număr ce nu poate fi numit în mai puțin de nouăsprezece silabe” este el însuşi un nume şi constă din optsprezece silabe[29]; prin urmare, cel mai mic întreg ce nu poate fi numit în mai puțin de nouăsprezece silabe poate fi numit în optsprezece silabe, ceea ce este o contradicție[30].

[28] Este vorba de paradoxul cunoscut astăzi sub numele de *paradoxul lui Russell*, mai exact, de forma în extensiune a acestui paradox. În terminologia actuală, clasa w este *clasa tuturor claselor care nu se conțin pe sine*. Întrebarea este dacă w se conține sau nu pe sine (din supoziția că se conține rezultă că nu se conține şi invers) (n. trad.).

[29] Numărul de silabe la care fac referire autorii este valabil pentru numele englezeşti. Reformularea paradoxului în limba română presupune modificarea corespunzătoare a acestui număr (n. trad.).

[30] Această contradicție mi-a fost sugerată de dl. G. G. Berry, de la Bodleian Library.

(6) Dintre numerele ordinale transfinite, unele pot fi definite, pe când altele nu. Numărul total al definițiilor posibile este $\aleph_0$, în timp ce numărul ordinalelor transfinite depășește $\aleph_0$. Prin urmare, trebuie să existe ordinale nedefinibile, iar dintre acestea unul trebuie să fie cel mai mic[31]. Însă acesta este definit drept „cel mai mic ordinal nedefinibil”, ceea ce este o contradicție[32].

(7) Paradoxul lui Richard[33] este înrudit paradoxului celui mai mic ordinal nedefinibil. Să considerăm toate zecimalele ce pot fi definite printr-un număr finit de cuvinte; fie *E* clasa acestor zecimale. Atunci *E* are $\aleph_0$ termeni; deci membrii săi pot fi ordonați – primul, al doilea, al treilea etc. Fie *N* un număr definit astfel: dacă a *n*-a poziție din al *n*-lea zecimal din *E* este *p*, atunci a *n*-a poziție din *N* trebuie să fie $p + 1$ (sau 0, dacă $p = 9$). Atunci *N* este diferit de toate numerele din *E*, întrucât orice valoare finită ar avea *n*, poziția a *n*-a din *N* este diferită de poziția a *n*-a din al *n*-lea zecimal din *E* și deci *N* este diferit de al *n*-lea zecimal. Cu toate acestea, noi l-am definit pe *N* printr-un număr finit de cuvinte și deci *N* trebuie să facă parte din *E*. Astfel, *N* este și nu este un element al lui *E*.

În toate contradicțiile de mai sus (care sunt doar o parte dintr-un număr indefinit) există o caracteristică comună ce poate fi descrisă drept autoreferință sau reflexivitate. Afirmația lui Epimenide trebuie inclusă în domeniul său propriu. Dacă *toate* clasele care nu sunt propriile lor elemente sunt elementele lui *w*, aceasta trebuie de asemenea să i se aplice și lui *w*; la fel pentru contradicțiile relaționale. În cazul numelor și al definițiilor, paradoxurile rezultă din considerarea nenumirii, respectiv a nedefinirii, drept elemente ale numelor și definițiilor. În cazul paradoxului lui Burali-Forti, seria, al cărei număr ordinal cauzează dificultatea, este seria tuturor numerelor ordinale. În fiecare contradicție se spune ceva despre *toate* cazurile de un anume gen, din care un nou caz pare a fi generat, care este și nu este de același gen cu *toate* cazurile considerate. Însă aceasta este caracteristica totalităților ilegitime, așa cum le-am definit în prezentarea principiului cercului vicios. Prin urmare, toate aceste contradicții sunt ilustrări ale erorii cercului vicios. Rămâne să arătăm deci că totalitățile ilegitime presupuse sunt eliminate prin ierarhia tipurilor pe care am construit-o[34].

[31] $\aleph_0$ este numărul întregilor finiți.

[32] Cf. König, „Ueber die Grundaglen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem”, *Mat. Annalen*, vol. LXI (1905); A. C. Dixon, „On well-ordered's aggregates”, *Proc. London Math. Soc. Series* 2, vol. IV, Part. I (1906), and E. W. Hobson, „On the Arithmetic Continuum”, *ibid*. Soluția oferită în ultima dintre lucrări depinde de modificarea „aparatului definițional” și este concordantă, în mare, cu soluția adoptată aici. Ea nu invalidează însă enunțul din text dacă „definiția” este dată ca o semnificație constantă.

[33] Cf. Poincaré, „Les mathématiques et la logique”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, Mai 1906, în special secțiunea VII și IX; de asemenea, Peano, *Revista de Matematica*, vol. VIII. No. 5 (1906), p. 149 ff.

[34] În studiul său *Russell's Mathematical Logic* (1944), K. Gödel susține că în prima ediție a *Principiei* paradoxurile sunt evitate prin teoria simplă a tipurilor combinată cu teoria ordinelor. Rezultatul acestei combinații este „teoria ierarhiei ramificate”, care, în opinia lui Gödel, este independentă de principiul cercului vicios (n.trad.).

(1) Când un om spune „eu mint”, putem interpreta enunțul său în felul următor: „există o propoziție pe care eu o afirm şi care este falsă”. Cu alte cuvinte, el asertează adevărul unei anumite valori a funcției „eu asertez *p* şi *p* este falsă”. Am văzut însă că termenul „fals” este ambiguu şi că pentru a-l face neambiguu trebuie să specificăm ordinul falsității sau, ceea ce este acelaşi lucru, ordinul propoziției căreia i se atribuie falsul. Am văzut, de asemenea, că dacă *p* este o propoziție de ordin *n*, o propoziție în care figurează *p* ca variabilă aparentă nu este de ordinul *n*, ci de un ordin superior. De aceea, tipul de adevăr sau fals care poate aparține enunțului „există o propoziție *p* pe care eu o afirm şi care are fals de ordin *n*” este adevărată sau falsă de un ordin superior lui *n*. Prin urmare, enunțul lui Epimenide nu cade în domeniul său propriu şi deci nici o contradicție nu rezultă.

Dacă privim enunțul „eu mint” ca pe un mod compact de-a face simultan următoarele enunțuri

„Eu asertez o propoziție falsă de ordinul întâi”
„Eu asertez o propoziție falsă de ordinul doi” etc.

dăm peste următoarea stare curioasă de lucruri: dat fiind că nici o propoziție de ordinul întâi nu este asertată, enunțul „eu asertez o falsă propoziție de ordinul întâi” este falsă[35]. Acest enunț este de ordinul doi, de aceea enunțul „eu fac un fals enunț de ordinul doi” este adevărat. Acesta este un enunț de ordinul trei şi este singurul enunț făcut de ordinul trei. Prin urmare, enunțul „eu fac un enunț fals de ordinul trei” este fals. Vedem astfel că enunțul „eu fac un enunț fals de ordinul $2n + 1$” este fals, în timp ce „eu fac un fals enunț de ordinul $2n$” este adevărat. Însă, în această stare de lucruri nu există nici o contradicție.

(2) Pentru a rezolva contradicția despre clasa tuturor claselor care nu se conțin pe sine, vom asuma, ceea ce va fi explicat în capitolul următor, că o propoziție despre o clasă este întotdeauna reductibilă la o propoziție despre funcția care defineşte clasa, adică despre funcția satisfăcută de membrii clasei şi de nici un alt argument. Astfel, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcție şi care presupune funcția, aşa cum, de exemplu, $(x). \Phi x$ presupune funcția $\Phi \hat{x}$. Prin urmare, conform principiului cercului vicios, o clasă nu poate fi argumentul funcției sale definitoare, altfel spus, dacă notăm cu „$\hat{z}$ (Φz)” clasa definită prin $\Phi \hat{z}$, simbolul „$\Phi\{\hat{z}(\Phi z)\}$” trebuie să fie fără sens. De aceea, o clasă nu poate nici să satisfacă, nici să nu satisfacă funcția sa definitorie şi deci (după cum se va vedea din Cap. III) nu poate nici să fie, nici să nu fie un membru al său. Aceasta este o consecință imediată a limitării argumentelor posibile ale unei funcții explicată la începutul acestui capitol. Astfel, dacă α este o clasă, enunțul „α nu este elementul lui α” este întotdeauna

[35] Aceeaşi neglijență în utilizarea termenilor enunț (*statement*) şi propoziție/judecată (*proposition*), ca şi în restul lucrării. Am încercat totuşi să reproduc cât mai fidel exprimarea autorilor (n. trad.).

fără sens şi deci tot fără sens este şi expresia „clasa tuturor claselor care nu se conţin pe sine”. Prin urmare, contradicţia rezultată din presupunerea că există o astfel de clasă dispare.

(3) O observaţie similară se aplică „relaţiei dintre R şi S ori de câte ori R nu este în relaţia R cu S”. Să presupunem că relaţia R este definită printr-o funcţie $\Phi(x, y)$, adică R are loc între x şi y doar când $\Phi(x, y)$ este adevărată. Atunci, pentru a o interpreta pe „R este în relaţia R cu S”, vom presupune că R şi S pot fi argumente cu sens pentru Φ. Asumând însă (după cum se va arăta în Cap. III) că R presupune funcţia sa definitorie, aceasta ar necesita ca Φ să poată lua ca argument un obiect definit în termeni de Φ, ceea ce nici o funcţie nu poate face după cum am arătat la începutul acestui capitol. Prin urmare, „R este în relaţia R cu S” este fără sens şi deci contradicţia dispare.

(4) Soluţia la paradoxul lui Burali-Forti necesită alte câteva dezvoltări. Pentru moment este suficient să observăm că o serie este o relaţie şi că un număr ordinal este o clasă de serii. (Aceste enunţuri sunt justificate pe parcursul lucrării.) De aceea, o serie de numere ordinale este o relaţie între clase de relaţii şi are un tip mai înalt decât oricare dintre seriile care sunt elementele numerelor ordinale în chestiune. Noţiunea lui Burali-Forti de „număr ordinal al tuturor ordinalelor” trebuie să fie numărul ordinal al tuturor ordinalilor de un tip dat şi deci trebuie să fie de un tip mai înalt decât oricare din aceste ordinale. Prin urmare, el nu este unul dintre aceste ordinale şi deci nu este nici o contradicţie în faptul că este mai mare decât oricare dintre ele.

(5) Paradoxul despre „cel mai mic număr ce nu poate fi numit în mai puţin de nouăsprezece silabe” realizează, în mod evident, o eroare a cercului vicios. Aceasta, pentru că sintagma „ce poate fi numit” (*nameable*) se referă la totalitatea numelor, fiindu-i totuşi permis să fie unul dintre ele. De aceea nu poate fi vreun astfel de lucru precum totalitatea numelor, în sensul în care vorbeşte paradoxul despre „nume”. Este uşor de văzut că, în virtutea ierarhiei funcţiilor, teoria tipurilor face imposibilă totalitatea „numelor”. Putem, în schimb, să distingem nume de diferite ordine: (*a*) nume elementare vor fi aşa cum sunt adevăratele „nume proprii”, adică apelaţiuni convenţionale ce nu implică nici o descripţie. (*b*) Nume de ordinul întâi ce implică o descripţie prin intermediul funcţiilor de ordinul întâi; cu alte cuvinte, dacă $\Phi!\hat{x}$ este o funcţie de ordinul întâi, „termenul care satisface $\Phi!\hat{x}$” va fi nume de ordinul întâi, deşi nu întotdeauna se va găsi un obiect numit astfel. (c) Numele de ordinul doi sunt nume ce implică descripţii cu ajutorul funcţiilor de ordinul doi; printre acestea vor fi şi numele care implică o referinţă la totalitatea numelor de ordinul întâi. Putem construi astfel o întreagă ierarhie. Pe nici o treaptă însă nu putem da sens expresiei „ce poate fi numit” fără să specificăm ordinul numelui ce urmează a fi folosit; şi orice nume în care intervine expresia „numit prin nume de ordinul n” este în mod necesar de ordin mai înalt decât n. Astfel, paradoxul dispare.

Soluţiile la paradoxul despre cel mai mic ordinal nedefinibil şi la paradoxul lui Richard sunt asemenea celor de mai sus. Noţiunea „definibil”, care apare în ambele, este aproape aceeaşi cu noţiunea „ceea ce poate fi numit" din cel de-al cincilea paradox: „definibil" nu este altceva decât „ceea ce poate fi numit" când sunt excluse numele elementare; adică „definibil" înseamnă „ceea ce poate fi numit printr-un nume care nu este elementar". Însă aici este aceeaşi ambiguitate a tipurilor ca mai înainte şi aceeaşi nevoie de a adăuga cuvinte prin care să se specifice tipul definiţiei. În orice caz, tipul poate fi specificat, „cel mai mic ordinal nedefinibil prin definiţii de acest tip" este o definiţie de un tip mai înalt; iar în paradoxul lui Richard, când ne limităm la numerele zecimale care au o definiţie de un tip dat, cum se cere, numărul *N*, cel care produce paradoxul, se dovedeşte a avea o definiţie de un tip mai înalt şi deci nu cade în domeniul definiţiilor noastre anterioare.

Un număr indefinit de alte contradicţii, similare celor şapte de mai sus, poate fi uşor de realizat. Soluţia este în toate cazurile la fel. În fiecare caz, contradicţia se datorează prezenţei unui cuvânt caracterizat prin ambiguitatea sistematică a tipului, la fel ca în cazul *adevărului*, *falsului*, *funcţiei*, *proprietăţii*, *clasei*, *relaţiei*, *cardinalului*, *ordinalului*, *numelui*, *definiţiei*. Orice astfel de cuvânt, dacă ambiguitatea sa tipică este trecută cu vederea, generează o totalitate ce conţine membri definiţi în termenii totalităţii dând astfel naştere erorii cercului vicios. În multe cazuri, concluzia argumentelor ce implică eroarea cercului vicios nu este autocontradictorie, însă oriunde avem o totalitate ilegitimă, cu puţină ingeniozitate putem construi o eroare a cercului vicios generatoare de contradicţie. Aceasta dispare de îndată ce cuvintele tipic ambigue sunt redate ca tipic definite, adică determinate ca aparţinând unui tip sau altul.

Aşadar, apariţia contradicţiei este întotdeauna datorată prezenţei cuvintelor ce conţin o ambiguitate tipică ascunsă, soluţia constând în scoaterea la lumină a ambiguităţii.

În ciuda contradicţiilor rezultate din ambiguitatea tipică nesesizată, nu este de dorit să se evite cuvintele şi simbolurile care au ambiguitate tipică. Toate ideile cu care se ocupă matematica şi logica îmbracă, practic vorbind, astfel de cuvinte şi simboluri: ambiguitatea sistematică este rezultatul unei analogii sistematice. Cu alte cuvinte, în mai toate raţionamentele din cuprinsul matematicii şi al logicii matematice folosim idei ce pot primi orice fel de determinare dintr-un număr infinit de determinări tipice diferite, fiecare dintre ele făcând raţionamentul valid. Astfel, prin folosirea de cuvinte şi simboluri tipic ambigue putem face un lanţ de raţionamente aplicabile oricărui caz dintr-un număr infinit de cazuri diferite, ceea ce nu ar fi fost posibil dacă am renunţa la utilizarea cuvintelor şi a simbolurilor tipic ambigue.

Dintre propoziţiile în întregime exprimate în termenii ambiguităţii tipice, singurele care pot să difere în privinţa adevărului şi falsului, conform determinării tipice pe care o primeşte fiecare, sunt teoremele de existenţă. Presupunând că numărul total al individualilor este n, numărul total al claselor de individuali este 2^n; numărul total al claselor de clase de individuali este de 2^{2^n} şi aşa mai departe. Aici n poate fi sau finit, sau infinit, dar de fiecare dată $2^n > n$. Astfel de numere cardinale, mai mari decât *n*, dar nu mai mari decât 2^n, există cu aplicare la clasele de clase, nu cu aplicare la clasele de individuali, astfel încât, oricare ar fi numărul presupus de individuali, teoremele de existență au loc pentru tipurile superioare, nu pentru cele inferioare. Chiar şi când numărul de individuali nu este asertat, ci doar ipotetic asumat, putem înlocui tipul individualilor cu orice alt tip cu condiția să facem o înlocuire corespunzătoare a tuturor tipurilor ce apar în acelaşi context. Aşa stând lucrurile, putem da numele de „individuali relativi" membrilor unui tip arbitrar ales τ, numele de „clase relative de individuali" claselor de „individuali relativi" şi aşa mai departe. Astfel, atâta timp cât sunt vizați numai ipotetici (*hypotheticals*), în care teoremele de existență pentru un tip sunt prezentate ca fiind implicate de teoremele de existență ale altuia, chiar şi pentru teoremele de existență numai tipurile *relative* sunt relevante. Aceasta se aplică inclusiv cazurilor în care ipoteza este *asertată* (şi implicit concluzia), cu condiția ca aserțiunea să aibă loc pentru orice tip, indiferent cum este ales. De exemplu, orice tip are cel puțin un membru; prin urmare, orice tip ce constă din clase, indiferent de ordin, are cel puțin doi membri. Însă dezvoltarea mai departe a acestei teme trebuie lăsată în sarcina lucrării[36].

***Traducere din limba engleză de* Iancu Lucica**

Notă. Traducerea s-a realizat după Alfred North Whitehead şi Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge at The University Press, ediția a doua 1925–27 (retipărită în 1968), vol. I, cap. II, pp. 37–65.

[36] Cele douăsprezece note de subsol care apar în traducere neînsoțite de precizarea „n. trad." aparțin autorilor.