PERSPECTIVE ASUPRA FILOSOFIEI MATEMATICII LA KANT. CONSIDERAŢII CRITICE

MARIUS AUGUSTIN DRĂGHICI

Institutul de Filosofie și Psihologie „Constantin Rădulescu-Motru" al Academiei Române

Abstract. Any attempt to elucidate Kant's philosophy of mathematics faces a primary challenge due to the fact that he did not provide a unified, systematic, and coherent perspective on mathematics in his work; besides the general challenge of interpreting Kantian texts. In this research, I critically analyze the perspective suggesting a possible unification of mathematics in Kant by reducing arithmetic (algebra) to Euclidean geometry and, subsequently, to the Eudoxian theory of proportions. This suggestion is based on the idea that the latter serves as the foundation for Euclidean geometry, as advocated by D. Sutherland. The underlying assumption is that, through the theory of space, Kant had in mind the geometry of his time – Euclidean geometry. Furthermore, it is posited that the concept of number and the operations of arithmetic can be reduced to the proportions (ratio) and operations of the Eudoxian theory (relations of equality and part-whole). I claim that this position can only be partially supported because, for Kant, the foundation of mathematics lies in transcendental theory, where priority is given to the figurative synthesis in the pure intuition of time. This synthesis is primarily responsible for arithmetic, not geometry.

Keywords: Kant's philosophy of mathematics, transcendental philosophy, geometry, algebra, intuition

INTRODUCERE

Încercarea de a aborda filosofia matematicii la Kant se confruntă în primul rând cu lipsa, în opera acestuia, a unei perspective unitare, sistematice şi/sau coerente cu privire la matematică, precum şi cu dificultatea lecturii kantiene în general – aspecte bine-cunoscute asupra cărora nu insistăm aici (i.e., multiplele referiri disparate şi nesistematice la matematică prezente în majoritatea lucrărilor sale fundamentale, noutatea şi dificultatea jargonului kantian, multiplele sensuri în care sunt considerate concepte de bază ale teoriei lui, dificultatea şi ideile novatoare ale filosofiei kantiene în general etc.).

Orientându-ne după ceea ce s-a scris despre filosofia kantiană a matematicii, procedând la o riscantă apreciere generală, poate cel mai important moment din ultimii 50 de ani a fost volumul apărut în 1992 *Kant's Philosophy of Mathematics*[1], în editarea lui Carl J. Posy, aşa cum susţine acelaşi editor (alături de Ofra Rechter) în introducerea la mult mai recentul volum *Kant's Philosophy of Mathematics*[2] publicat în 2020.

Totuşi, erau publicate studii şi cercetări de acest tip din perioada anterioară anului apariţiei primului volum menţionat mai sus (aici nu mă refer la „prima tradiţie" în filosofia matematicii a lui Kant, inaugurată de „clasici" precum Cantor şi continuată de Frege şi de Russell, ci mai ales la studiile lui Jaakko Hintikka şi Michael Friedman, dar nu numai). Aceiaşi ultimi doi autori sunt prezenţi şi în volumul din 1992, dar ceea ce s-a reuşit cu acest prim volum colectiv a fost în primul rând că, punând laolaltă sub un titlu atractiv autorii cei mai frecventaţi la acea vreme în lucrări despre filosofia matematicii a lui Kant, a fost atrasă atenţia asupra „actualităţii" şi deci a importanţei acestui tip de cercetare (de filosofie a matematicii kantiană). În al doilea rând, aşa cum subliniază Posy, spre deosebire de linia Cantor – Russell în interpretarea filosofiei matematicii kantiene, începând cu Hintikka şi Parsons, s-a oferit o perspectivă mai puţin reducţionistă şi mai puţin „ostilă" gândirii matematice kantiene. O astfel de „întorsătură" nu s-a produs oricum, pe baza unor preferinţe „subiective", ci datorită deschiderilor oferite de adoptarea de noi strategii argumentative şi mai ales metodologice; de exemplu, o aplecare mai atentă şi mai diversificată asupra mai multor aspecte ale poziţiilor lui Kant despre matematică decât cele explicite în acest sens, cum ar fi: contextul istoric; analiza surselor gândirii sale matematice; îndreptarea cercetărilor asupra legăturilor acestei gândiri cu filosofia transcendentală în ansamblu ori spre „metodologia" dezvoltată de Kant în *Critica raţiunii pure*; operaţionalizarea hermeneutic-sistematică în diferitele analize şi reconstrucţii a distingerii între perioadele precritică şi critică etc.

Cele de mai sus şi încă altele asemenea au condus la o schimbare a negativului verdict pus de tradiţia Cantor – Quine asupra actualităţii filosofiei matematicii a lui Kant. Vechile critici, în special cele îndreptate împotriva aşa-zisei fetişizări a „intuiţiei pure" kantiene sau împotriva distincţiei *analitic–sintetic* au fost înlocuite de evaluări pozitive ca urmare a unor reconstrucţii sistematice şi chiar semantice ale arsenalului structural-conceptual cu care Kant a putut fi „apărat". Mai mult, cele consemnate mai sus au făcut posibile noi cercetări, aşa încât putem indexa zeci sau chiar sute de articole, studii, cărţi, volume colective etc. care propun diverse abordări şi noi deschideri în filosofia matematicii a lui Kant – spre exemplificare,

---

[1] *Kant's Philosophy of Mathematics. Modern Essays*, Carl J. Posy (ed.), Kluwer Academic Publishers – Dordrecht*I* Boston*I*London, 1992.

[2] *Kant's Philosophy of Mathematics Volume I: The Critical Philosophy and its Roots*, Carl. J. Posy, Ofra Rechter (eds.), Cambridge, Cambridge University Press, 2020.

nu pomenesc în notele de mai jos decât câteva dintre lucrările lui Daniel Sutherland[3] şi ale Lisei Shabel[4] dedicate acestei arii de cercetare.

Interesant este faptul că volumul din 1992 a deschis o adevărată „tradiţie", aşa cum arată şi editorii volumului din 2020 în introducerea la care m-am referit mai sus: este vorba despre indexarea unei „noi tradiţii", un tip de „antologie" a textelor mai puţin recente şi foarte recente despre filosofia matematicii kantiană, care nu a mai rămas separată de perspectiva-cadru a filosofiei transcendentale, de perspectiva (pre-)critică sau de celelalte aspecte amintite, care nu erau prezente în „prima tradiţie".

Pentru a explica mai clar intenţia eseului de faţă, voi întregi cumva tabloul cu privire la filosofia kantiană a matematicii schiţat mai sus referindu-mă foarte pe scurt la câteva aspecte ce vizează volumul *Kant's Philosophy of Mathematics* din 2020. Beneficiul realizat de primul volum (1992) editat tot de Posy a fost pe bună dreptate acela că cercetările şi studiile despre doctrina matematicii a lui Kant care i-au urmat (din ultimii 30 de ani) au căpătat un rang asemănător celui pe care îl au cercetările kantiene în general[5]. Dacă această zonă de cercetare a fost mai degrabă neglijată în secolul trecut, în zilele noastre studiile dedicate cunosc o largă audienţă şi un interes crescut în cele mai prestigioase centre de cercetare a filosofiei kantiene. Mai mult, aşa cum subliniază şi Posy, a existat un val de interes pentru studiul critic al modului cum a influenţat *percepţia* despre filosofia matematicii a lui Kant de la finele secolului 19 şi începutul secolului 20 („prima tradiţie", cum am numit-o) cercetările ulterioare asupra matematicii la Kant şi asupra programului său teoretic în ansamblu. Din acest punct de vedere, cele două volume editate de Posy şi Rechter (primul apărut în 2020) preia unele texte publicate în ultimele decenii propunând noi perspective, cum ar fi cea a lui D. Sutherland, care reia o temă din cercetările sale din 2006 despre viziunea lui Kant asupra aritmeticii[6].

Privitor la propria mea evaluare, voi sublinia un aspect care are legătură cu ceea ce este comun acestor ample analize, începând cu cele ale lui Jaakko Hintikka,

---

[3] *Kant's Mathematical World*, Cambridge, Cambridge University Press, 2021; „Kant's Philosophy of Arithmetic: An Outline of a New Approach", în *Kant's Philosophy of Mathematics*, Carl Posy, Ofra Rechter (eds.), Cambridge, Cambridge University Press, 2020, pp. 248–266; *Arithmetic from Kant to Frege: Numbers, Pure Units, and the Limits of Conceptual Representation*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008; "Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions", în *Journal of the History of Philosophy*, vol. 44, nr. 4, 2006, pp. 533–558.

[4] "Kant's Mathematical Principles of Pure Understanding", în James O'Shea (ed.), *Kant's Critique of Pure Reason: A Critical Guide*, Cambridge, Cambridge University Press, 2017; *Kant*: *Studies on Mathematics in the Critical Philosophy*, (co-ed. Emily Carson), Routledge, 2015 (revizuit 2020); "Kant's Philosophy of Mathematics", în *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2013; „Kant's 'Argument from Geometry'", în *Journal of the History of Philosophy*, vol. 42, nr. 2 (2004), pp. 195–215.

[5] "Introduction", în *Kant's Philosophy of Mathematics Volume I: The Critical Philosophy and its Roots*, ed. cit., pp. 4–5.

[6] Spre deosebire de „prima tradiţie", menţionez aici accentul apăsat asupra rolului "intuiţiei", pe care Sutherland îl acordă în reconstrucţia sa.

Michael Friedman şi Charles Parsons până la cele ale Lisei Shabel sau ale lui Daniel Sutherland, anume că au avut în vedere nu numai aspectele matematice ale filosofiei lui Kant, ci şi elemente ale filosofiei sale transcendentale, ale diferitelor contexte istorice sau sistematice ale programului său etc. În acest sens, metodologic sau din perspectiva unei propedeutici a abordării filosofiei kantiene a matematicii, aş adăuga la exigenţele introduse de „noua tradiţie" încă două: a) distingerea între perioadele de creaţie corespunzătoare celor două ediţii ale *Criticii raţiunii pure* (A/B)[7] şi b) considerarea poziţiei lui Kant în legătură cu matematica *în general*. Referitor la ultimul aspect, aş puncta aici doar că, atunci când se analizează o problemă precum relaţia dintre geometria euclidiană şi modul cum înțelege Kant geometria ca ştiinţă (a spaţiului), ar trebui avute în vedere nu doar elementele explicite, „locurile comune" unde filosoful german abordează în mod direct subiectul. În acest caz, distingerile între ediţiile A şi B, precum şi considerarea unor elemente abordate de Kant în perioada pre-critică, aşa cum ar fi conceptul de mărime, după cum şi problema „intuiţiei" pot fi determinante în raport cu un rezultat sau altul al cercetării.

Această cercetare are următoarea desfăşurare, în două părţi: porneşte de la o problemă relativ circumscrisă, raportul dintre geometrie şi aritmetică/algebră în perspectiva unei unificări a acestor domenii din filosofia matematicii la Kant, şi se continuă cu o discuţie privind sursele filosofiei matematicii kantiene în ideea de a propune câteva clarificări privind locul geometriei şi al aritmeticii/algebrei în concepţia lui Kant despre matematică şi în raport cu filosofia sa transcendentală. Voi aduce în discuţie aspectul metodologic menţionat mai sus în legătură cu necesitatea ca o raportare la filosofia matematicii a lui Kant în general să aibă în vedere şi poziţia lui din perioada de tinereţe. Particularitatea aici constă în faptul că referirile lui Kant la matematică din perioada de tinereţe nu includ problema intuiţiei pure ca fundament al acestei ştiinţe.

După cum se observă, aceste aspecte sunt, de fapt, circumscrise, aşa încât pretenţiile cercetării de faţă nu se ridică la nivelul unui proiect care să dea seama de mai mult; în ciuda acestui ultim aspect, trebuie subliniat că, în afara celor spuse anterior, este de luat în seamă poziţia cu privire la un element fundamental, sau mai multe, dintr-o disciplină matematică sau alta[8], precum şi perspectiva asupra matematicii în general ale lui Kant, deoarece ele trebuie considerate *împreună* pentru a putea avea o privire cât mai completă înaintea unei propuneri despre filosofia matematicii kantiană. Se poate spune că o perspectivă bine structurată metodologic, în această speţă cel puţin, poate deveni decisivă în cercetare. Mai

[7] Imm. Kant, *Critica raţiunii pure,* trad. de N. Bagdasar şi E. Moisuc, ed. a III-a îngrijită de Ilie Pârvu, Bucureşti, Editura IRI, 1998. Textele din Kant vor apela la acestă traducere în româneşte, însă indicarea „locului" în *Critică* se va face doar prin menţionarea standard conform notaţiei ediţiei Academiei din Berlin specifică celor două ediţii.

[8] În afară de geometrie şi aritmetică/algebră, nu am în vedere trigonometria, disciplină la care sunt puţine referiri, indirecte, în lucrările lui Kant; analiza matematică, de asemenea, trebuie considerată în stadiul ei incipient.

mult, că cele arătate mai sus se pot ridica la rang de principiu, atâta timp cât specificul cercetării kantiene necesită, aproape legat de orice temă (kantiană), *şi o reconstrucţie* teoretică, nu doar o analiză pur istoric-hermeneutică.

O perspectivă mai fidelă decât cea a exegezei hermeneutice sau decât cea pur analitică a filosofiei matematicii la Kant, aşa cum a încercat „prima tradiţie”, se poate decela *inclusiv* prin considerarea unei analize a elementelor de matematică în contextul concepţiei lui Kant cu privire la disciplinele matematice; s-ar putea observa astfel că numai printr-o reconstrucţie, care să ţină cont şi de filonul exegetic-istoric-interpretativ, putem da seama cu adevărat atât de elementele componente, cât şi de perspectiva de ansamblu a lui Kant privind matematica. Pe de altă parte, acest traseu nu poate ignora programul kantian din epistemologie, nici elemente care sunt de fapt fundamentale deopotrivă teoriei *Criticii* în general şi concepţiei despre cunoaşterea matematică a filosofului german, precum relaţia *analitic-sintetic*, problema construcţiei în intuiţia pură etc.

Aspectele metodologice schiţate mai sus seamănă până la un punct cu poziţia lui Daniel Sutherland în această chestiune, unul dintre cei mai cunoscuţi comentatori actuali ai filosofiei matematicii kantiene. În *Kant's Mathematical World*[9], Sutherland consideră că o completă înţelegere a filosofiei matematicii la Kant implică ceea ce acesta credea despre geometrie, aritmetică, algebră şi analiză; deşi propriile cercetări s-au concentrat asupra geometriei şi aritmeticii/algebrei, cu promisiunea că va include într-o proximă lucrare şi analiza, Sutherland leagă disciplinele de mai sus de *o anumită înţelegere* a matematicii la Kant, anume ca fiind „ştiinţa despre mărimi”, şi, de aici, cu perspectiva asupra „*geometriei* ca ştiinţa despre mărimi”; mai mult, geometria este considerată de Sutherland ca fiind, la Kant, disciplina matematică sui-generis, care la rându-i are la bază teoria eudoxiană a proporţiilor.

Cele arătate mai sus nu constituie însă scopul eseului de faţă, care este mult mai modest: o primă evaluare *critică* a perspectivei după care o posibilă unificare a matematicii la Kant se poate realiza prin reducerea aritmeticii (algebrei) la geometria euclidiană şi, de aici, la teoria eudoxiană a proporţiilor (poziţia lui D. Sutherland); şi anumite exerciţii preliminare ale unei analize viitoare mai ample privind filosofia matematicii la Kant, concentrate acum doar într-o încercare de fixare metodologică a discursului kantian despre matematică asupra unei lucrări de tinereţe (*Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral*[10]) şi asupra *Critcii...* . Formulate ca două sarcini corespunzătoare celor două părţi ale textului, comentariile şi analizele mele vor avea în vedere în principal cercetări ale lui Sutherland (prima parte) şi două studii, despărţite de o oarecare distanţă în timp, despre paralela lucrării *Prize Essay* şi *Critica raţiunii pure* pornind de la „sursa”

---

[9] „Introduction”, în *Kant's Mathematical World*, ed. cit., p. 3.

[10] Este vorba despre eseul lui Kant din 1763, răspuns la întrebarea-concurs a Academiei de ştiinţe din Berlin privind posibilitatea utilizării metodei matematice în filosofie, în special în teologia naturală şi în morală. Eseul lui Kant a primit al doilea premiu, după cel acordat unei lucrări a lui Moses Mendelssohn. Lucrarea cu titlul în germană a rămas cunoscută (şi citată) în literatura de specialitate de limbă engleză sub numele de *Prize Essay*, pe care îl vom utiliza şi noi.

matematicii (problema intuiţiei pure a priori) – este vorba despre un text fundamental în ceea ce priveşte re-considerarea în exegeză a referirilor lui Kant la matematică din prima *Critică* (studiul lui Jaakko Hintikka din 1967[11]) şi despre o recentă lucrare a Ofrei Rechter[12].

PARTEA I: FUNDAMENTUL MATEMATICII LA KANT – TEORIA PROPORŢIILOR?

Ca şi în alte studii anterioare acestui recent volum (*Kant's Mathematical World*[13]), urmând o sugestie a lui Michael Friedman, Daniel Sutherland consideră şi aici că perspectiva răspândită în vremea lui Kant privind statutul geometriei ca ştiinţă a mărimilor ar fi fost fundată în ultimă instantă în „teoria eudoxiană a proporţiilor"[14]. Perspectiva particulară pe care o conţine filosofia transcendentală kantiană cu privire la intuiţie reţine o legătură indisolubilă cu caracterul constructiv al geometriei; mai mult, cum vom vedea, Sutherland reduce chiar rolul intuiţiei din aritmetica lui Kant tot la cel jucat de intuiţie în geometrie.

Deşi argumentele lui Sutherland sunt bine articulate, cum voi arăta mai jos, totuşi, ele se sprijină pe anumite interpretări mai tari ale unor concepte problematice kantiene (*analitic-sintetic*, intuiţie etc.), de unde se poate observa inclusiv filonul puternic interpretativ dinspre care porneşte perspectiva sa metodologică cu privire la necesitatea ca filosofia kantiană a matematicii să considere şi poziţia filosofului german cu privire la disciplinele pomenite mai sus; însă, cum am arătat, aceste liniamente sunt legate, de fapt, *de maniera în care Sutherland interpretează* (ceea ce el consideră a fi) poziţia lui Kant despre geometrie, aritmetică, mărimi şi construcţie în intuiţia pură.

În această parte voi propune o apreciere mai mare a rolului intuiţiei *pure* şi a locului ei în ce priveşte *sensul direcţional* al posibilităţii matematicii în filosofia transcendentală kantiană (din perioada critică) precum şi o relativizare a interpretărilor date de Sutherland conceptelor-cheie kantiene de „mărime", „unitate" şi „număr". El încearcă unificarea concepţiei lui Kant despre aritmetică/algebră şi geometrie prin teza după care ultima este fundată în teoria eudoxiană a proporţiilor, iar aritmetica sprijinindu-se pe geometrie, în definitiv, s-ar sprijini tot pe teoria eudoxiană a proporţiilor; mai mult, susţine chiar că această perspectivă ar arunca o lumină asupra concepţiei kantiene referitoare la cogniţia umană în general[15].

---

[11] „Kant on the Mathematical Method", în *The Monist*, vol. 51, no. 3, „Kant Today": Part I (July, 1967), pp. 352–375.

[12] Ofra Rechter, "The View from 1763: Kant on the Arithmetical Method Before Intuition", în *Intuition and the Axiomatic Method* (The Western Ontario Series in Philosophy of Science), 2006, pp. 21–46.

[13] Vezi nota 3.

[14] Aceste aspecte vor fi dezvoltate mai jos.

[15] "Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions", ed. cit., p. 558.

Prima asumpţie a lui Sutherland este că, dat fiind că teoria proporţiilor a lui Eudoxius oferă o tratare matematică a mărimilor continue, aceasta ar putea fi direct legată de felul cum înţelege Kant geometria (pentru că geometria este o ştiinţă a mărimilor). O problemă a înţelegerii poziției lui Kant privind matematica derivă din obscuritatea modului său de raportare la entitățile *continue* din geometrie, pe de o parte, şi la cele *discrete* din aritmetică, pe de alta – cele două abordări fiind cel puţin distincte, dacă nu ireductibile. Sutherland încearcă să articuleze o perspectivă care să reducă artimetica la geometrie ca ştiinţă a mărimilor continue. Astfel, atât geometria cât şi aritmetica s-ar sprijini pe teoria eudoxiană a proporţiilor. În întregul său demers, Sutherland reinterpretează prin prisma teoriei eudoxiene a proporţiilor conceptele kantiene de „număr", „mărime", „unitate", „omogenitate". În prezentarea problemei enunţate, voi reda mai jos foarte pe scurt această teorie, punând-o în legătură cu dificultatea reprezentării mărimilor discontinue în raporturi de mărimi continue.

Sensul conceptului de număr este pus de Sutherland în relație cu accepţiunea platoniciană, care presupune două sensuri: în primul, descriptiv, numărul este al unor obiecte concrete ce pot fi descrise ca diferite şi numărabile; în al doilea, abstract, numărul se referă la numerele „pure" ce pot fi numai gândite. În ultimul caz unităţile nu diferă, oricare fiind la fel cu oricare alta. Pentru Platon, cele „pure" au o existenţă independentă (Aristotel respinge acest statut) şi sunt indivizibile – prin urmare, singurele propriu-zis numere sunt cele întregi[16]. Sutherland consideră că acest al doilea sens, al numerelor pure, pare a fi cel care l-ar fi influenţat şi pe Kant. Dar această interpretare platoniciană a numerelor pure este de regăsit şi înainte, la Pythagoras, iar mai târziu la Euclid, care defineşte „numărul" drept o colecţie de unităţi compuse care exclud punerea în fracţii. Deci, numerele nu pot fi decât numere întregi, iar numerele întregi care, în fracţii, *nu dau tot numere întregi* nu sunt numere.

Pentru pytagoreici, primii care au dezvoltat o teorie a raporturilor, raporturile dintre mărimi (precum cele dintre două linii sau dintre două suprafeţe) sunt exprimate ca raporturi între numere; dar pentru că numerele sunt limitate la numere întregi, s-a ajuns la concluzia că teoria lor nu putea fi aplicată la toate tipurile de mărimi. Exemplul dat este cel al numărului iraţional √2, care nu poate fi exprimat ca un raport între două numere întregi; pentru că nu există o unitate care să le poată măsura pe ambele, presupusele mărimi ale lui √2 dintr-un raport de tip fracţie sunt, prin urmare, *incommensurabile* sau *indeterminate*. Aşadar, există raporturi între mărimi care nu pot fi exprimate de raportul dintre două numere întregi, iar aceasta ar fi o limitare a teoriei pytagoreice despre proporţii.

Teoria eudoxiană a proporţiilor s-ar fi formulat ca răspuns la dificultăţile întâmpinate de perspectiva pytagoreică – Eudoxus defineşte proporţia într-un mod care nu face apel la numere. Apelul lui Sutherland aici este la definiţia lui Euclid din „Cartea a 5–a" a *Elementelor*, unde se spune că un raport (*ratio*) este „un fel de

[16] Urmez aici şi mai jos sinteza lui Sutherland, vezi *op. cit.*, pp. 535–537.

relaţie cu privire la mărimea dintre două mărimi omogene”[17]. Într-o notaţie din algebra modernă (generalizare), această definiţie presupune clasicele raporturi de proporţionalitate („mai mare”, „egal” şi „mai mic”) a două perechi de mărimi puse în fracţii, cu fiecare mărime înmulţită cu câte un scalar (două numere naturale pozitive) – relaţia dintre cele două perechi de mărimi puse în raporturi este de egalitate (a/b=c/d) dacă relaţia dintre mărimile multiplicate cu cei doi scalari din prima pereche dă acelaşi tip de relaţie între mărimile *multiplicate cu aceiaşi scalari după aceeaşi regulă* ale celei de-a doua perechi („mai mare”, „egal” sau „mai mic”)[18].

Faptul că operaţiile şi relaţiile sunt pe mărimi şi nu pe numere conduce la concluzia că, în teoria eudoxiană a proporţiilor, *nu se întâlnesc şi nu se utilizează numere* ca exprimând raporturi, ci numai *mărimi* sau raporturi de mărimi; prin urmare, este deschisă posibilitatea de a lucra inclusiv cu mărimi *incomensurabile,* dacă nu sunt reprezentate ca numere. Această nouă perspectivă a fost preluată de Euclid, iar atât mărimile *continue* cât şi cele *discrete* (ca mărimi) pot fi puse sub formă de raporturi. Desigur, completează Sutherland, pentru că nu toate numerele (cum este $\sqrt{2}$, de exemplu) pot sta în raporturi, aşa cum o fac mărimile continue, numerele sunt un caz special cu anumite limite, al clasei mai generale de mărimi. Această tradiţie inaugurată de Euclid, prin urmare, s-a concentrat mai mult pe mărimile continue ale geometriei mai degrabă decât pe cele aritmetice, de unde am fi justificaţi să acodăm o importanţă sporită geometriei.

Sutherland discută apoi despre influenţele importante pe care teoria proporţiilor le-ar fi avut asupra filosofiei matematicii a lui Kant în ceea ce priveşte conceptul de „mărime omogenă”. Ca o mărime să fie omogenă ea trebuie să poată sta într-un raport de proporţionalitate, aşa cum sunt liniile, suprafeţele/ariile, numerele, unde fiecare mărime, pentru a sta într-un raport cu o alta, trebuie ca atunci când este multiplicată să fie mai mare decât cealaltă. Sunt excluse de aici mărimile dintr-un raport în care una dintre ele presupune infinitul mic sau mare. Astfel, ca „mărimi omogene” se pot califica liniile care sunt omogene cu linii, planele cu plane sau numerele cu numere; dar o linie nu poate sta într-un raport cu un număr aşa cum o suprafaţă, o arie nu poate sta într-un raport (*ratio*) cu un volum, iar acestea sunt explicate prin faptul că nu există posibilitatea de a putea avea relaţii de mărime comparativă între ele. Doar „mărimile omogene” pot sta în acest tip de relaţii comparative; mai mult, aceste mărimi pot compune o mărime care este omogenă cu

---

[17] *Ibidem.*

[18] În exprimarea lui Sutherland: „o pereche de mărimi se află în aceeași raport cu o alta dacă și numai dacă relația de dimensiuni comparate a primei perechi (mai mare, egală sau mai mică) este aceeași cu relația de dimensiuni comparate a celei de-a doua perechi în toate transformările echimultiple; sau: pentru oricare patru mărimi a, b, c și d și oricare două numere naturale pozitive m și n avem egalitatea a:b=c:d dacă şi numai dacă: ma > nb → mc > nd; ma = nb → mc = nd; ma < nb → mc < nd” (notă: toate citatele şi/sau referile în limba română la textele autorilor la care mă refer sunt traduse de mine).

ele şi mai mare decât fiecare în parte: liniile pot fi combinate între ele pentru a forma linii mai mari, spaţiile pentru a forma spaţii mai mari etc.

Aceste elemente şi caracteristici sunt menţionate de Sutherland nu doar pentru că exprimă proprietăţile matematice de bază ale mărimii, ci şi pentru că au un oarecare rol în dezvoltarea şi susţinerea propriei sale poziţii. Este şi motivul pentru care noi le-am adus în prim-plan, însă propunerea noastră va fi expusă şi susţinută pe parcursul expunerii poziţiei lui Sutherland şi în finalul acestei părţi a articolului. Observaţia pe care o facem acum este doar că, pentru Kant, aceste relaţii şi proprietăţi matematice de bază ale mărimii au un regim special şi pot fi distinse, într-o primă fază, prin operaţiile de compoziţie de adunare şi scădere.

Cei mai mulţi comentatori consideră că în „Axiome ale Intuiţiei" [B 203] din „Analitica transcendentală" este pusă cel mai explicit de către Kant natura cunoaşterii matematice şi, consideră Sutherland, ar trebui să fie punctul de plecare din *Critică* pentru orice interpretare a acestei teme. Kant se referă aici la cunoaşterea matematică în termeni de cunoaştere a mărimilor. Legătura cu teoria proporţiilor eudoxiană este susţinută de Sutherland prin faptul că regimul sub care aceste cunoaşteri stau în gândirea kantiană cuprinde cogniţiile despre mărimi comparabile, care pot fi reduse la cogniţiile *egalităţii* şi ale relaţiilor de tip *parte-întreg*, relaţii întâlnite în teoria eudoxiană – aceste cunoaşteri implică relaţiile de tip egalitate şi parte-întreg ale mărimilor. În plus, aceste relaţii nu au nevoie, într-o primă instanţă, de asocierea cu relaţiile de adunare şi scădere, validitatea lor fiind de tipul evidenţei logice. Întrucât Kant înţelege mărimea ca multiplul omogen în intuiţie, Sutherland consideră că aceasta exprimă exact concepţia eudoxiană despre mărimile omogene. Sensul noţiunii omogenităţii, aşa cum este deopotrivă la Eudoxus–Euclid şi la Kant, surprinde specificul compoziţiei matematice de care mărimile sunt capabile. Pe de altă parte, spre deosebire de mărimi, conceptele reprezintă doar diferenţe de tip calitativ şi, astfel, ele nu vor putea niciodată reprezenta un multiplu omogen. În fine, intuiţia poate reprezenta diferenţa numerică *fără diferenţă calitativă*, ceea ce înseamnă că intuiţia ne permite reprezentarea mărimilor – deşi Sutherland recunoaşte şi celelalte roluri ale intuiţiei (cum ar fi reprezentarea succesivităţii).

Întrebarea pe care şi-o pune Sutherland este de ce Kant a considerat necesară pentru matematică omogenitatea strictă? Răspunsul pare să vină prin Platon şi Aristotel, atâta vreme cât la Kant părţile mărimilor strict omogene sunt calitativ indistincte, corespunzând astfel cu puritatea unităţilor matematice la Platon şi Aristotel. Este redat un citat din Aristotel, pe care nu îl mai reluăm aici[19], dar ideea care se desprinde este că, înainte de Kant, şi Aristotel considera că matematica vizează cantitatea şi continuitatea distinct de proprietăţile calitative. Sutherland justifică posibilitatea relaţiilor compartive de tip parte-întreg prin raportul cu spaţiul ca mărime extensivă spaţiilor determinate ca întreguri formate din părţi, toate acestea având la bază conceptul de omogenitate; această legătură este realizată între

[19] Vezi *ibidem*, p. 340.

„omogenitatea strictă" şi caracterul matematic al mărimilor. Cum voi arăta mai în detaliu mai jos, la Kant aceste tipuri de relaţii simple sunt asimilabile, ca validitate, legilor fundamentale ale logicii generale; în plus, aceste posibilităţi sunt strict legate de spaţiu ca intuiţie pură.

Asimilarea mărimilor continue ale geometriei cu numerele şi mărimile discrete din aritmetică reprezintă cea mai dificilă problemă a interpretării lui Sutherland sau, altfel spus, reducerea aritmeticii la geometrie în condiţiile în care se are în vedere în primul rând caracterul sintetic al aritmeticii. Căci aritmetica ne spune mai mult decât putem deduce din analiza simplelor concepte, exclusiv prin intelect. Mai mult, necesitatea intuiţiei a fost legată în special de caracterul sintetic şi totusi *a priori* al aritmeticii. Unul dintre exemplele celebre este cel prezent şi în „Introducerea" (V) la *Critica* B: 5 + 7 = 12. În cunoaşterea faptului că această relaţie este adevărată, trebuie să ne ajutăm în intuiţie de reprezentarea lui 5 şi 7 utilizând degetele sau puncte desenate pe o pagină. Sutherland propune să recitim fragmentul de la B 15–16 în lumina presupoziţiilor cognitive ale teoriei proporţiilor, iar atunci în prim-plan vor pătrunde rolurile relaţiilor parte-întreg şi de egalitate. Prin prisma acestor caracteristici, aritmetica ar fi înglobată în geometrie. Observaţia noastră anterioară este şi aici potrivită, căci pentru validitatea relaţiilor parte-întreg şi de egalitate *ca atare*, aşa cum vom vedea mai jos, nu sunt necesare decât legile logicii. O abordare sistematică a acestei chestiuni vom oferi în final, în coerenţă cu alte elemente.

Întroducând problema necesităţii intuiţiei, Sutherland aduce în discuţie paragraful B 15–16, unde se vorbeşte despre caracterul sintetic al aritmeticii – oricât de mult am *gândi* unificarea a două numere, până nu luăm în considerare compunerea lor în intuiţie nu putem determina care este suma lor şi cu ce anume este egală. Kant a avut în vedere sinteza intuitivă care guvernează compunerea mai ales în partea de „Schematism" (B 182); compunerea nu este alta decât „sinteza figurativă" care intră în rol atunci când, de exemplu, trasăm o linie. Subliniind importanţa timpului în această operaţie, pornind de la Charles Parsons, M. Friedman argumenta că Imm. Kant apelează la timp pentru a reprezenta succesiva iteraţie a operaţiilor pe care se bazează matematica. D. Sutherland numeşte sinteza figurativă *sinteză de compoziţie* sau *sinteza compoziţiei*; la Kant o întâlnim în nota de la B 201, la care ne vom referi în final. Aici menţionăm doar că această compoziţie este „sinteza omogenului în tot ce poate fi considerat matematic". Sinteza compoziţiei corespunde compoziţiei speciale ale cărei mărimi omogene şi doar ele îi pot fi obiect sau pot fi operate aici. Reprezentarea acestei compoziţii este cea care este cerută *în intuiţie,* atât în aritmetică cât şi în generarea mărimilor continue ale geometriei, cu distingerea la Kant între mărimile continue şi *discretul* aritmeticii.

Luând în considerare conceptul de număr, pe care Kant îl vede în „Deducţia" A ca ţinând de categoria totalităţii, iar numărul trebuie văzut ca un întreg (A 99), acesta cere nu atât multitudinea de părţi, cât o cogniţie a lui ca întreg, care este posibilă prin categoria totalităţii (B 111). Aceste elemente, consideră Sutherland, sunt sugestive în teoria mai largă kantiană a mărimii, lucru cu care suntem de acord şi pentru care le prezentăm şi noi. Problema care se ridică şi la care vom răspunde şi noi în final este cum mărimile discrete ale aritmeticii sunt relaţionate cu mărimile continue ale teoriei proporţiilor? Răspunsul pe care îl vom formula se leagă de una dintre dificultăţile acestui pas, observată şi de Sutherland, anume faptul că, în „Axiome ale intuiţiei”, Kant neagă că mărimea discretă este cu adevărat mărime – ultimul fiind mai degrabă un termen care aparţine natural mărimii continue (A 170-71/B 212), deşi la B 554 pare că spune contrariul (*quantum discretum*).

Sutherland aduce apoi în prim-plan definiţia numărului la Euclid, unde „numărul este o colecţie de unităţi”, iar teoria proporţiilor şi a proporţiilor între numere ar replica de fapt teoria Eudoxiană a proporţiilor (numerele ar fi doar un caz special de mărimi). Prin urmare, ar fi natural să presupunem că Imm. Kant tratează numerele ca un caz special al mărimii în general. Totuşi, în afara dezvoltării observaţiilor de mai sus, aici apar şi alte restricţii legate de felul în care Kant înţelege, sistematic, rolul şi locul numărului între tipurile de mărimi la care se referă, şi care deschid şi o altă interpretare, cum voi arăta.

Asimilarea numerelor mărimilor continue la Kant s-ar face asemănător felului în care Aristotel înţelegea relaţia dintre cele măsurabile şi procesul măsurării, care presupune „unitatea”, „unul” ca unitate de măsură. Se spune apoi despre orice număr că poate fi mai multe întrucât numărul este constituit din unităţi şi pentru că fiecare număr este măsurabil prin unu, prin unitate. În numărare, specificăm unitatea de măsură şi procedăm la operaţia de adunare progresiv către totalitatea cerută[20]. Sutherland susţine, şi cu sprijinul unui exemplu, că în acest fel se poate echivala unitatea dintre numerele discrete şi mărimile geometriei.

Ideea numărării ca măsurare prin unitate, în perioada modernă timpurie, era aproape comună printre matematicieni, dar nu reluăm aici istoricul făcut de Sutherland, ci reţinem că toată matematica tindea să fie descrisă ca o ştiinţă a măsurării (Wolff, Euler sunt daţi ca exemple): matematica era considerată ştiinţa măsurării a orice care permite măsurarea. Kant ar fi avut aceeaşi poziţie: descriind matematica ca ştiinţă a măsurării, el tratează numărul *unu* şi sumele parţiale ale *sumei* seriei ca exemple de unităţi de măsură pentru numărare. Se pune şi problema cerinţei cognitive cu privire la numărare: lucrurile numărate/numărabile trebuie să fie gândite ca fiind de acelaşi fel şi astfel să cadă sub acelaşi concept de numărare.

Până aici suntem de acord cu „măsura numărului ca rezultat al măsurării unităţilor”, însă nu ca o mărime continuă. Căci este vorba despre măsurare prin unitatea ca *întreg*, ceea ce consider că reprezintă o restricţie pentru asimilarea mărimilor discrete celor continue. Dacă numărul este considerat o mărime în sensul lui Sutherland, atunci el trebuie să fie un continuum, adică să nu admită prin operaţii subdiviziuni care să nu poată fi scrise ca un raport între două numere

[20] La Aristotel unul, unitatea este măsura numărului. Din acest punct de vedere, numărarea mărimilor discrete poate fi privită ca un fel de măsurare.

întregi. Pentru că ceea ce defineşte Sutherland aici este numărul în sensul în care este admis acest raport. Cum vom vedea, instructiv este faptul că definiţia lui Kant se referă la numerele „numărabile”, deci în acelaşi sens restricţionat al numărului, fără nedeterminate şi fără iraţionale.

Pentru validitatea pretenţiei lui Sutherland de a putea asimila numărarea cu măsurarea mărimilor continue este necesar a gândi numerele ca fiind reprezentate ca/de dimensiuni/lungimi. Conceptele de număr pot apărea din sinteza care generează o linie atunci când lungimile liniilor sunt marcate de o unitate de măsură. Această operaţie ar fi o dovadă pentru asimilarea cunoaşterii aritmetice celor continue şi, de aici, teoriei proporţiilor. Deşi în general putem fi de acord cu această asumpţie, conceperea numărului ca *discret* impune anumite restricţii la care ne-am mai referit şi la care vom reveni sistematic la final, în interpretarea noastră. Exemplul lui Sutherland este de tipul unei reprezentări geometrice în intuiţie a numărului, nu al unei mărimi continue (că unitatea de măsură marchează secţiunile corepunzătoare pe o riglă sau puncte desenate pe o pagină este acelaşi lucru).

În continuare, Sutherland face apel la istoria matematicii pentru a prezenta momentele trecerii de la aritmetică la algebră şi concepţia modernă a legăturii dintre geometrie şi algebră, în care ultima este descrisă ca interfaţă a geometriei şi invers. Este pomenită, în primă instanţă, tradiţia aritmeticienilor greci care a condus la „liberalizarea conceptului de număr” astfel încât să includă şi numerele raţionale prin posibilitatea de a divide o unitate după cum era nevoie, tratând părţile unităţii ca noi unităţi. Apoi, inspirat de acesta din urmă, F. Viète a aplicat algebra la geometrie. Descartes, la fel, a îmbunătăţit şi mai mult aplicarea algebrei la geometrie deschizând o robustă eră a rezolvării problemelor geometrice în modernitatea timpurie. Începând cu secolul 17, distingerea dintre aritmetică şi algebră a fost din ce în ce mai greu de realizat: a fost văzută ca artă a calculării sau ca artă a calculării cu litere care stau pentru a reprezenta numere necunoscute şi indeterminate (ecuaţii cu necunoscute). Kant a distins între aritmetică şi algebră în lecturile sale despre matematică în acest ultim sens. De asemenea, Wolff a distins în cartea sa între *algebra speciosa* şi *algebra numerosa* (aici avem doar numere). Ca definiţie, algebra a fost descrisă ca o *metodă* de a găsi soluţii utilizând ecuaţii, dar ca metodă de a găsi soluţii ecuaţiilor pur numerice ea a fost numită aritmetică. Dar, spune Sutherland, în ciuda acestor similarităţi sau suprapuneri, cazurile paradigmatice de rezolvare a unui sistem de ecuaţii utilizând litere şi cele care presupun calcule numerice sunt diferenţiabile. Dezvoltarea algebrei a apărut ca o metodă generală de a găsi soluţii mai degrabă decât de a fi o tehnică aritmetică de calcul. Ce rămâne de subliniat ar fi conexiunea apropiată dintre cele două în dezvoltările fiecăreia separat, de unde şi caracterizarea aritmeticii ca o algebră generalizată.

În rezumat, dacă Imm. Kant susţine că algebra este doctrina generală a mărimilor şi dacă teoria lui despre mărimi se sprijină pe teoria eudoxiană a proporţiilor, atunci algebra se va sprijini pe această teorie a proporţiilor. În &4 al *Prize Essay*, Kant ar susţine că obiectul matematicii este mărimea şi că algebra este doctrina generală a mărimilor[21]. Dar despre ce mărime este vorba? Kant susţine o apropiere între aritmetică şi algebră utilizând semne generale pentru numere. În *Critică*, el distinge două feluri de mărimi: *quantitas* şi *quanta*; „arithmetical formulae" şi algebra operează cu *quantitas*, iar geometria cu *quanta*. Iată pasajul în care Kant spune că mărimile aritmeticii nu sunt cele ale geometriei: „Dar matematica nu construieşte numai mărimi *(quanta)*, ca în geometrie, ci şi simpla mărime *(quantitas*), ca în algebră, unde face complet abstracţie de natura obiectului care trebuie gândit după un astfel de concept de mărime." (A 717/B 745).

Observaţia noastră aici are în vedere felul în care este înţeleasă „mărimea". În acelaşi pasaj, pe care îl vom relua, Kant distinge între mărimile *continue* şi cele care formează *numărul*, de care se ocupă algebra; în acest sens, vom arăta că teoria lui Kant despre mărimi nu se sprijină pe teoria proporţiilor, ci parcurge un alt traseu: de la intuiţia pură a priori prin sinteza figurativă către categoriile cantităţii unde numărul nu este decât *schema.* Vom încerca să arătăm, în final, că susţinerea lui Sutherland că algebra poate fi văzută ca exprimând teoria eudoxiană a proporţiilor, pe care Kant ar fi avut-o în vedere, dacă nu este un pas ilicit, este supusă unor restricţii care necesită revizuirea interpretării sale.

Cât priveşte (aritmetica şi) numărul, Sutherland îi schițează o scurtă istorie în aritmetică şi în algebră, pe care nu o reluăm aici decât parţial. Discuţia se poartă în jurul problemei *incomensurabilelor*, în primul rând a *iraţionalelor*, originată în concepţia grecească despre număr ca o colecţie de unităţi indivizibile. Divergenţa dintre tradiţia aritmetică diophantină şi tradiţia euclidiană geometrică este depășită însă în perioada modernă timpurie[22]. Modificarea tradiţiei aritmeticii despre număr a presupus dezvoltarea unor poziţii despre natura cantităţilor *indeterminate,* precum şi depărtarea de o concepţie concretă despre numere[23]. Un pas l-a făcut Simon Stevin (1585) cu a sa concepţie despre număr ghidată de operaţii pe numere şi de similaritatea generală dintre operaţiile aritmetice şi construcţiile geometrice. El a respins definiţia grecească despre „număr" ca o colecţie de *unităţi,* iar prin aceasta a respins totodată perspectiva că numerele sunt esenţial *discrete* şi a pretins că numerele sunt la fel de continue precum mărimile continue; *explicit el a susţinut că există numere iraţionale*. A adus o dovadă foarte sugestivă şi instructivă în acest sens, argumentând că partea este din acelaşi aluat ca întregul. Pentru că $\sqrt{8}$ este parte a lui 8, iar 8 este un număr, $\sqrt{8}$ este de asemenea un număr. Concepţia lui Stevin despre număr a fost fundată pe operaţii numerice, nu pe noţiuni despre naturile acestor operaţii moştenite din tradiţia matematică greacă. Perspectiva sa asupra unui *continuum* al numerelor a fost acceptată cel puţin implicit de matematicienii care au urmat: Descartes, Newton şi Leibniz, de exemplu, au susţinut şi ei că *există un număr care corespunde oricărui raport dintre două linii* (analiza matematică). *Geometria* lui Descartes a deschis calea de a vedea numerele ca linii

[21] Cf. *ibidem*, p. 548.
[22] Cf. *ibidem*, p. 352.
[23] Vezi nota 66, *ibidem*; prezentarea este un rezumat al expunerii lui Sutherland.

şi liniile ca numere. Noua concepţie despre număr s-a impus greu, la început cu Wallis, care a adoptat noul punct de vedere despre număr sub influenţa lui Stevin, a geometriei lui Descartes şi a paralelismului dintre operaţiile aritmetice şi construcţiile geometrice. Euler a folosit în *Introducere în aritmetică* (pentru uzul şcolar) concepţia greacă despre număr ca o colecţie de unităţi. În *Elemente de Algebră* (1770), el oferă însă o concepţie diferită: în primele pagini, Euler afirmă că numărul este nimic altceva decât proporţia unei mărimi cu o alta asumată arbitrar ca o unitate. Această afirmaţie include numerele iraţionale, de vreme ce este inclus raportul dintre diagonala unui pătrat şi latura sa. El acceptă că rădăcina pătrată a lui 12 este un număr pentru că pătratul său este un număr[24].

Am indicat mai sus câteva elemente care fac cel puţin problematică aprecierea că Sutherland ar fi argumentat convingător teza conform căreia filosofia kantiană a matematicii s-ar baza pe o teorie a mărimilor ce presupune teoria eudoxiană a proporţiilor. Odată cu prezentarea critică dublată de punerea în lumină a dificultăţilor susţinerilor lui Sutherland, ne vom expune propria poziţie, urmând ca în finalul părţii a II-a a studiului de faţă să adăugăm unele consideraţii suplimentare. Încă o observaţie este că, deşi insistă asupra importanţei intuiţiei pure *a priori* asupra matematicii, care ar fi presupus o incursiune la nivelul transcendental al teoriei kantiene, autorul „rupe" aceste niveluri considerând relativ separat discursul kantian asupra matematicii de cadrul transcendental în care este „scufundată" matematica.

Teza lui Sutherland este că teoria proporţiilor inculcă atât proprietăţile matematice de bază ale mărimilor, cât şi relaţiile *parte-întreg* şi de *egalitate* ale mărimilor omogene înţelese şi structurate în filosofia kantiană a geometriei; mai mult, aceste elemente determină chiar filosofia kantiană a aritmeticii şi a algebrei. Pentru aceasta, Kant ar fi preluat conceptul de „omogenitate" şi de „mărime" din teoria proporţiilor, aşa cum apare ea la Euclid. Sutherland mai afirmă că viziunea lui Kant despre mărimi fiind preluată din teoria proporţiilor, pentru justificarea acesteia el ar fi dezvoltat acel tip de cogniţie (intuiţia) care face posibilă însăşi acestă teorie a proporţiilor.

Prima concluzie tare susţinută de Sutherland a fost că tipul de legătură dintre algebră (înţeleasă ca generalizare a aritmeticii) şi teoria generală a mărimilor este de încorporare a primei în a doua; în sprijinul acestei idei, aduce ca exemplu pasajul de la B 15–16 din „Introducere", pe care îl voi relua mai jos. În acest sens, pentru ca ccea ce apare la B 15–16 să poată beneficia de interpretarea adecvată, aduc în discuţie mai întâi pasajul de la B 17, care vorbeşte exact despre aceste relaţii fundamentale ale geometriei, asimilate de Sutherland celor ale teoriei proporţiilor:

> Câteva puţine propoziţii fundamentale, pe care le presupun geometrii, sunt, într-adevăr, realmente analitice şi se întemeiază pe principiul contradicţiei; dar ele servesc totuşi, ca propoziţii identice, numai la înlănţuirea metodei şi nu ca principii; de exemplu a = a, întregul este egal cu sine însuşi, sau (a + b) > a,

[24] Cf. *ibidem*, p. 353.

adică întregul este mai mare decât partea. Dar chiar şi acestea, deşi valabile numai prin concepte, sunt admise în matematică numai fiindcă pot fi prezentate în intuiţie. [B 17]

Am spus mai sus, ca simplă observaţie, că pentru Kant aceste relaţii şi proprietăţi matematice de bază ale mărimii au un regim special. Acest lucru este relativ uşor de acceptat din fragmentul de mai sus, anume că ele, *ca atare*, sunt valide (sunt „valabile numai prin concepte") doar pe baza legilor logicii (a principiului noncontradicţiei şi a terţului exlus), fără a necesita intuiţie. Dar ele pot astfel funcţiona, inclusiv în matematică, ca propoziţii identice doar pentru înlănţuirea metodei şi nu ca principii propriu-zise; căci admiterea lor în matematică *în calitate de principii* este posibilă numai prin expunerea lor în intuiţie. Deci, acestea *ca atare*, aşa cum le utilizează Sutherland, nu pot da seama, de fapt, de caracterul sintetic *a priori* al matematicii în general şi nici nu pot sta ca fundament pentru geometrie, şi cu atât mai puţin pentru întreaga matematică. Ca *axiome*, ca principii ale geometriei, ele trebuie expuse în intuiţiile spaţiului şi timpului, numai astfel ele putând funcţiona ca *principii* din care să poată, deci, fi dezvoltată întreaga geometrie, ceea ce excede cadrul determinativ al teoriei proporţiilor. În plus, cum am văzut, relaţiile de compoziţie de aici se sprijină doar pe legile logicii, nu pe operaţiile matematicii, lucru foarte important. Deşi ele pot fi translatate şi dezvoltate sub forma operaţiilor matematicii, relaţia de întemeiere este dinspre filosofia transcendentală, unde sinteza figurativă stă la baza acestor operaţii prin punerea în funcţiune a imaginaţiei productive. Din acest punct de vedere, ceea ce susţinem este în concordanţă şi cu exigenţa kantiană de mai sus: sensul de fundare-determinare este dinspre filosofia transcendentală în care se poate „arăta" sau întemeia posibilitatea matematicii.

Pe de altă parte, am văzut că Sutherland discută necesitatea intuiţiei pentru caracterul sintetic al aritmeticii, în pasajul de la B 15–16:

S-ar putea crede fără îndoială la început că judecata 7 + 5 = 12 este o judecată pur analitică, care rezultă din conceptul sumei de şapte şi cinci în virtutea principiului contradicţiei. Totuşi, dacă o privim mai îndeaproape, găsim că conceptul sumei de 7 şi 5 nu conţine nimic mai mult decât unirea celor două numere într-unul singur, prin care nu se gândeşte câtuşi de puţin care este acel număr unic care le cuprinde pe amândouă. Conceptul de doisprezece nu este câtuşi de puţin gândit prin faptul că eu gândesc pur şi simplu acea reunire de şapte şi cinci, şi oricât de mult aş analiza conceptul pe care-l am despre o astfel de sumă posibilă, totuşi nu voi găsi în el pe cel de doisprezece.

Completăm pasajul de mai sus cu următorul:

Judecata aritmetică este totdeauna sintetică, convingându-ne de acest lucru cu atât mai clar când luăm numere ceva mai mari, căci atunci este evident că, oricum am învârti şi răsuci conceptele noastre, nu am putea niciodată găsi suma cu ajutorul simplei analize a conceptelor noastre, fără a recurge la intuiţie.

După cum se vede, primul pasaj se distinge de cel de-al doilea tocmai prin cele deja arătate: şi anume, că relaţiile şi proprietăţile teoriei proporţiilor, *ca atare*, dat fiind că acestea sunt valide analitic după legile logicii generale, nu necesită intuiţia pură *a priori* decât pentru calitatea de principii (axiome), pentru toată geometria. Completarea pe care am propus-o mai sus vine să sugereze această diferenţă între cele două tipuri de relaţii: relaţiile teoriei proporţiilor *ca atare*, care doar *gândite* sunt valide conform cu legile logicii, dar nu pot fi întemeitoare în acest mod; şi cele care trebuie arătate în intuiţia pură. Distingerea este evidentă *mai ales atunci când avem a face cu numere mai mari* şi nu putem constata pe loc rezultatul operaţiei sau evidenţa propoziţiilor, de pildă că 21804 + 34152 = 55956. Dat fiind că relaţiile teoriei proporţiilor sunt valide analitic, acestea nu pot da seama de caracterul sintetic *a priori* al matematicii, ele doar ajutând la înlănţuirea metodei. Din acest motiv, din ele nu se poate susţine necesitatea intuiţiei pure a priori; dimpotrivă, drumul este, deci, invers: de la unitatea transcendentală fundată în sinteza originară a apercepţiei transendentale la categorii, care abia acestea, prin schemele transcendentale (unde avem şi numărul ca schemă a categoriilor cantităţii), spre intuiţia pură a spaţiului şi timpului de la nivelul sensibilităţii. Aici, sinteza figurativă apare sub forma operaţiilor de compoziţie (a adunării şi a scăderii). În plus, nu poate fi eludată distingerea între intuiţiile pure ale spaţiului şi timpului, dintre care prima presupune imaginaţia productivă, iar ultima este condiţie de posibilitate pentru sinteza figurativă de la nivelul aritmeticii.

La B 182 Kant arată clar diferenţierea dintre spaţiu, ca imagine pură a tuturor mărimilor simţului extern (*quantatorum*), şi cea a tuturor obiectelor simţurilor *în genere* (inclusiv ale celor ale aritmeticii), care este timpul. În plus, cum am mai spus, numărul este doar *schema* categoriilor cantităţii la nivelul simţului intern (timpul):

> Imaginea pură a tuturor mărimilor *(quantorum)* pentru simţul extern este spaţiul; iar a tuturor obiectelor simţurilor în genere este timpul. Dar *schema* pură a *cantităţii (quantitatis)*, considerată ca concept al intelectului, este *numărul,* care este o reprezentare ce îmbrăţişează adiţiunea succesivă de unitate la unitate (omogenă). Astfel, numărul nu este altceva decât unitatea sintezei diversului unei intuiţii omogene în genere, prin faptul că eu produc timpul însuşi în aprehensiunea intuiţiei (B 182/A 143).

Numărul este legat de intuiţia pură a priori şi de unitatea sintetică a apercepţiei care guvernează unitatea sintezei diversului unei intuiţii omogene în genere prin faptul că eu produc *timpul* însuşi în aprehensiunea intuiţiei. Astfel, numărul este *schema* pură, indisolubil legată de unitatea sintezei diversului unei intuiţii omogene *în genere* ca rezultat al faptului că eu produc timpul însuşi în aprehensiunea intuiţiei. Deci este legat indisolubil de timp, nu de spaţiu ca formă pură; de aceea, ca cvasimărime, numărul nu poate fi redus cu totul doar la cele două tipuri de relaţii ale teoriei proporţiilor şi la simpla compoziţie, care, altfel, sunt valide în sine *analitic*. Ca atare, relaţiile parte-întreg şi de egalitate, care pot fi valide în virtutea principiului noncontradicţiei fără a fi date în intuiţia pură a priori a sensibilităţii, sunt restricţionate cel mult la a beneficia de sinteza intelectului (*synthesis intellectualis*, B 151), gândită doar prin intelect în raport cu multiplul unei intuiţii *în genere*, în simpla categorie. În calitatea lor de axiome (ale geometriei) însă, aceste relaţii *trebuie* supuse aceleiaşi sinteze figurative (*sythesis speciosa*), *sintezei transcendentale a imaginaţiei* (imaginaţia productivă) la nivelul simţului intern – timpul. Sinteza succesivă a reprezentărilor de adunări succesive este condiţia de posibilitate atât pentru axiomele geometriei (pentru a avea calitatea de principii), cât şi pentru operaţiile aritmeticii. Numai în intuiţia pură a timpului şi spaţiului aceste relaţii ale teoriei proporţiilor pot sta ca axiome şi deci pot sta ca principii (sintetice a priori) pentru construcţia întregii geometrii. Dacă urmărim şi indicaţia metodologică propusă, mai degrabă avem o aplicare a aritmeticii la geometrie, iar nu invers.

Cât priveşte numărul, reducerea acestuia la relaţia parte-întreg a mărimilor continue nu se susţine, iar fragmentul de la B 555 poate fi lămuritor în acest sens. Aici, numărul este dat ca întreg de părţi *deja* constituite, ceea ce nu este propriu mărimilor continue. Mai mult, în legătură cu cele arătate mai sus despre număr ca schemă pură a cantităţii (nu este el însuşi o cantitate/mărime *de măsurat*, ci *o măsură*), se vădeşte că „mărimile discrete" (*quantum discretum*) sunt, de fapt, un concept problematic, pe care Kant îl sesizează astfel. Pentru a înţelege mai bine problema mărimilor discrete, suntem nevoiţi să redăm întregul fragment de la B 555:

> Dar deşi această regulă a progresiei la infinit are loc, fără nici o îndoială, la subdiviziunea unui fenomen, considerat ca o simplă umplere a spaţiului, totuşi ea nu poate fi valabilă atunci când vrem să o extindem şi la mulţimea părţilor deja separate într-un anumit mod în întregul dat, prin care ele constituie un *quantum discretum*. A admite că în orice tot organizat fiecare parte la rândul ei este tot organizată şi că, divizând în felul acesta părţile la infinit, întâlnim mereu noi părţi organizate, într-un cuvânt că totul este organizat la infinit, acest lucru nu poate fi conceput, ci numai că părţile materiei ar putea fi organizate în descompunerea lor la infinit. Căci infinitatea diviziunii unui fenomen dat în spaţiu se fundează numai pe aceea că prin ea este dată numai divizibilitatea, adică o mulţime de părţi absolut nedeterminată în sine, pe când părţile însele sunt date şi sunt determinate numai prin subdiviziune, într-un cuvânt că întregul nu este deja divizat în sine. Diviziunea poate deci determina în acest întreg o mulţime, care merge atât de departe cât vrem să înaintăm în regresia diviziunii. Dimpotrivă, într-un corp organic, organizat la infinit, întregul este reprezentat, prin acest concept, ca fiind deja divizat şi se găseşte în el, înaintea oricărei regresii a diviziunii, o multitudine de părţi determinată în sine, dar infinită, ceea ce este contradictoriu; întrucât această dezvoltare infinită este considerată ca o serie care nu poate fi terminată niciodată (infinită) şi care totuşi este terminată într-o sinteză. Diviziunea infinită nu desemnează decât fenomenul ca un *quantum continuum* şi este inseparabilă de ceea ce umple spaţiul, căci tocmai în ceea ce umple spaţiul se află principiul divizibilităţii infinite. Dar îndată ce admitem ceva ca *quantum discretum*, mulţimea unităţilor lui este determinată, prin urmare ea este totdeauna egală cu un număr. [A 527, B 555]

Aşadar, ceea ce este problematic în conceptul de *quantum discretum* rezidă în faptul că în el este presupusă „mulţimea părţilor *deja* separate într-un anumit mod în întregul dat" (s.n.); de îndată ce admitem ceva ca *quantum discretum*, mulţimea unităţilor lui este determinată, prin urmare „ea este totdeauna egală cu un număr". Iar acest număr, cum am arătat, reprezintă doar *schema* categoriei cantităţii, ce poate fi tradusă doar ca „măsurabilitate". Ca număr (*quantum discretum*), am văzut că nu i se poate aplica ceea ce este propriu doar mărimilor continue (*quantum continuum*), anume diviziunea la infinit; în plus, la mărimile continue avem *în primul rând* necesitatea spaţiului ca formă pură, în care este posibilă întinderea.

Această completare este instructivă, căci traducerea lui Sutherland a celor spuse în acest pasaj în termeni de relaţii de tip parte-întreg şi egalitate nu se susţine în ce priveşte numărul (*quantum discretum*), decât cu restricţiile amintite; de asemenea, Sutherland pare să minimalizeze rolul intuiţiei *pure* sau construcţia în intuiţia *pură* apriori a *timpului*.

Consecinţa este că, dacă cele de mai sus sunt citite conform celor spuse de Kant, prin legătura dintre număr şi sinteza figurativă în intuiţiile pure ale spaţiului şi timpului, care subîntind unităţile *deja date* într-un întreg, este restricţionată chiar asimilarea la relaţia de tip parte-întreg a ceea ce consideră Sutherland prin *quantum discretum*. Din acest punct de vedere, exemplul lui Sutherland care ar ilustra perspectiva unificatoare asupra considerării împreună a mărimilor discretului şi continuului (exemplul este cu perechea de pantofi[25] ca unitate de măsură după care căutăm în cameră câte perechi de pantofi avem pentru a forma numărul totalităţii) devine un contra-exemplu: mărimea numărului de perechi este obţinută *prin adiţie*, nu prin diviziunea continuului, ceea ce mai degrabă certifică distincţia decât justifică asimilarea mărimilor discrete celor continue; chiar dacă am fi procedat invers, de la a vedea dacă un anumit număr presupus reprezintă o totalitate a unităţilor (perechile de pantofi din cameră), tot nu ar fi permisă asimilarea: numărul de perechi va fi fost deja dat în totalitatea reprezentată de numărul presupus, pentru că perechile însele erau *deja constituite*.

Exemplul lui Sutherland este de tipul unei reprezentări geometrice în intuiţie a numărului, nu o mărime continuă (reiau exemplul didactic utilizat în geometrie, unde unitatea de măsură marchează secţiunile corepunzătoare pe o riglă sau puncte desenate pe o pagină, ambele reprezintând acelaşi lucru). Kant distinge mărimile continue de cele discrete, fiecare având un regim propriu, divizibilitatea la infinit a unui segment neaplicându-se mărimilor discrete (Kant respingând infinitul actual). Se poate spune că mărimile discrete, prin număr (întreg) aşa cum îl acceptă Kant, se situează la un alt nivel al construcţiei transcendentale – în corelaţie cu sinteza figurativă în succesiune la nivelul intuiţiei pure a simţului intern ca determinare a timpului.

[25] *Ibidem*, pp. 543–544.

În ceea ce priveşte asimilarea aritmeticii algebrei de către Kant şi reducerea ultimei la geometrie, Sutherland invocă un fragment dintr-o scriere timpurie kantiană (*Prize Essay*, 1763), unde se susţine că obiectul matematicii este mărimea şi că algebra este doctrina generală a mărimilor; dar Kant ar fi avut în vedere, în ultimă instanţă, tot teoria eudoxiană a proporţiilor, atâta timp cât algebra, ca teorie generală despre mărimi, s-ar reduce la geometrie, iar ultima s-ar sprijini pe teoria proporţiilor. Pentru ilustrare, redăm pasajul:

> În acest caz, este evident că această știință trebuie să se bazeze pe câteva principii fundamentale foarte clare ale teoriei generale a mărimilor (care, strict vorbind, este aritmetică generală). Și acolo se vede creșterea și scăderea mărimilor, reducerea lor la factori egali în teoria rădăcinilor – toate provenind din câteva concepte fundamentale simple. Și câteva concepte fundamentale ale spațiului efectuează aplicarea acestei cunoașteri generale a mărimilor la geometrie.

În acest pasaj, de fapt, sensul este dinspre aritmetică/algebră spre matematică în general, iar geometria este cea care beneficiază de algebră, iar nu invers („câteva concepte fundamentale ale spațiului efectuează *aplicarea acestei cunoașteri generale a mărimilor la geometrie*” – s.n.); principiile sunt ale teoriei generale a mărimilor, ale aritmeticii generale (algebra), care poate fi aplicată întregii geometrii, este adevărat, prin simplele concepte ale spaţiului, care efectuează această aplicare. Desigur, nu este clar dacă acele proprietăţi de creştere şi descreştere ale mărimilor sau ale reducerii lor la factori egali din teoria rădăcinilor sunt cele ale teoriei proporţiilor (faptul că Imm. Kant face apel la teoria rădăcinilor şi nu la relaţii între figuri geometrice ne face să credem că avem a face cu proprietăţi ale algebrei, deşi pot fi traduse şi în simplele relaţii despre mărimi ale geometriei). Problemele semnalate de noi restricţionează utilizarea acestui pasaj pentru a justifica că, algebra fiind o ştiinţă despre mărimi, iar mărimile continue putând asimila mărimile discrete, aritmetica generală ar putea fi redusă la geometrie.

În orice caz, Kant presupune măsurabilitatea prin numere ca exprimând întregi sau aşa-zisele mărimi discrete, posibile numai prin sinteza figurativă a succesiunii în timp, prin care este determinat însuşi timpul. Unul dintre punctele vulnerabile ale poziţiei lui Sutherland este modul în care înţelege „mărimea”. În pasajele avute în vedere, Kant distinge între mărimile continue şi cele care formează numărul, de care se ocupă algebra; în acest sens, arătăm că teoria lui Kant despre mărimi nu se sprijină pe teoria proporţiilor, ci parcurge un alt traseu: de la intuiţia pură *a priori* prin sinteza figurativă către categoriile cantităţii unde numărul nu este decât *schema*.

Prima dificultate a interpretării lui Sutherland priveşte sintezele diferite corespunzătoare aritmeticii, respectiv geometriei. Sinteza construcţiei geometrice ar fi sinteza în general a mărimilor continue, adică sinteza omogenului sau sinteza „părţii cu partea”, iar sinteza compoziţiei aritmeticii ar fi cea a mărimilor *discrete* sau a „unităţilor”. Sutherland recunoaşte că Imm. Kant nu apelează la linii pentru a reprezenta numere, ci la degete, deşi Segner se referă şi la linii care reprezintă numere. Soluţia lui Sutherland are la bază afirmaţia lui Kant din *Critică* că „la baza fiecărui număr trebuie să fie unitate". Numărul ca unitate este asimilat dimensiunii fundamentale a măsurării şi, astfel, celei de mărime. Spre deosebire de Sutherland, ceea ce susţinem aici este că relaţiile parte-întreg ale colecţiilor discrete sunt restricţionate la înţelegerea numărului ca *agregat* (B 204 n.), unde numărul presupune „părţi" deja constituite, ceea ce restricţionează asimilarea numărului mărimii *continue* dinspre această direcţie.

Asimilarea numerelor dimensiunilor este, de altfel, doar o propunere a acestui autor; dar, așa cum am arătat deja, această asimilare este posibilă numai dacă dimensiunile sunt reprezentate ca fiind consistente unităţilor discrete; dar ea nu este posibilă dacă dimensiunile sunt luate drept continue, din cauza restricţionării impuse de distingerea kantiană între mărimi continue şi discrete. Numai ca unitate indivizibilă numărul poate fi luat ca un continuum (*quanta*), ceea ce revine la a spune că mărimile continue sunt asimilabile celor discrete *sub restricţiile ultimelor,* nu invers; sau că teoria proporţiilor şi operaţia de compoziţie asociată sunt dependente de sinteza figurativă a succesiunii în timp a unităţilor discrete şi indivizibile.

Cea mai dificilă problemă a interpretării lui Sutherland priveşte „omogentiatea" sau distingerea între tipurile de omogenităţi: este omogenitatea unei simple numărări şi „omogenitatea strictă", adică cea admisă de Kant în matematică. Omogenitatea unei simple căderi sub un concept-numărător comun nu este peste tot la fel de strictă ca diferenţa doar numerică, fără nicio diferenţă calitativă. Dacă omogenitatea numărării nu ar necesita intuiţie, de ce intuiţia este considerată necesară de Kant pentru combinatorica ce susţine aritmetica? Dacă avem a face cu două tipuri de omogenitate, iar numai cea definită de el ca „strictă" poate fi considerată în matematică, atunci motivul pentru care Kant apelează la intuiţie are legătură deci tot cu teoria eudoxiană a proporţiilor.

Acest răspuns constituie totodată şi locul pe care Sutherland îşi sprijină întreaga interpretare, căci încearcă să justifice necesitatea intuiţiei pure la Kant în legătură cu „omogenitatea strictă", specifică teoriei eudoxiene a proporţiilor. Sutherland consideră că omogenitatea cerută de numărare este semnificativ diferită de stricta omogenitate cerută pentru compoziţia matematică, lucru respins de noi mai sus. Kant nu distinge între sinteze când vine vorba despre matematică în general. Distingerea sa are sens ca distingere între sinteză a *agregării* şi sinteză a *coaliţiei* (B 201)[26]. Prin urmare nu putem fi de acord cu distingerea pe care o face Sutherland între omogenităţi, pentru că orice numărare este o succesiune care reclamă determinările de timp, deci o sinteză. Kant are în vedere aceeaşi omogenitate, fără diferenţe calitative, atât în geometrie cât şi în aritmetică: oricum, în construcţia în intuiţia pură a priori; în matematică, Imm. Kant nu admite omogenitatea diferenţiabilă calitativ. Or, aritmetica este posibilă numai în intuiţia pură a priori prin sinteza succesiunii multiplului în timp.

---

[26] La nota B 201 Kant spune că este vorba despre „...sinteza *omogenului* în tot ceea ce poate fi examinat *matematic* (sinteză care, la rândul ei, poate fi divizată în sinteză a *agregaţiei* și în sinteză a *coaliţiei,* dintre care cea dintâi se raportează la mărimi *extensive,* cea de-a doua la mărimi *intensive*)".

În fapt, problema revine la interpretarea noastră: pentru că, la Kant, geometria este singura care admite axiome şi pentru că relaţiile fundamentale dintre mărimi comparabile (de tipul parte-întreg şi de egalitate) sunt valide analitic, în lipsa oricărei intuiţii (pure), rămâne în picioare necesitatea punerii în relaţie a mărimilor discrete cu intuiţia pură a *timpului*, şi nu a mărimilor continue ca în geometrie, căci relaţiile fundamentale dintre acestea nu au nevoie de intuiţia pură decât în considerarea axiomelor *ca principii*, adică din care să poată fi construită întreaga geometrie. Pe de altă parte, aritmetica, şi cu ea algebra, are nevoie de intuiţia pură pentru a putea face posibilă întreaga extindere peste matematică în general. Ceea ce nu subliniază autorul este că întreaga sa construcție se bazează, dincolo de interpretările particulare pe care le propune conceptelor discutate mai sus, în primul rând pe felul în care este justificată *intuiţia a priori*. Din acest punct de vedere, în finalul abordării noastre vom încerca o altă interpretare.

PARTEA A II-A: FUNDAMENTUL MATEMATICII LA KANT – ARITMETICA/ALGEBRA SAU TEORIA PROPORŢIILOR?

Dacă în prima parte am discutat problema raportului dintre aritmetică (algebră) şi geometrie în legătură cu intuiţia (pură) din *Critică*, în această a doua parte voi lega unele pasaje din prima parte de analizele despre raportul aritmeticii cu geometria, aşa cum le vedea Kant în perioada de tinereţe. Miza acestei alăturări este, pe de o parte, punerea în lumină a prezenței distingerii între geometrie ca teorie a proporţiilor şi aritmetică (algebră) încă din perioada pre-critică şi, pe de altă parte, urmând unele indicaţii ale lui Jaakko Hintikka şi ale Ofrei Rechter, încercarea de înţelegere a intuiţiei pure a priori din *Critică* prin prisma concepţiei lui Kant despre natura matematicii din lucrarea de tinereţe *Prize Essay*. Concluzia acestei părţi va susţine o slăbire a „intuitivităţii" intuiţiei pure a priori, pornind de la sugestiile lui Hintikka, şi, sperăm, o înţelegere mai clară a legăturii cu ansamblul transcendentalului kantian din *Critică*.

În *Critica raţiunii pure,* „identităţile" matematicii respectiv metafizicii (filosofiei) sunt legate de distincţia dintre modalitatea în care se face filosofie şi cea în care se face matematică sau dintre modul cum se obţine cunoaşterea filosofică respectiv cunoaşterea matematică – un rol fundamental aici îl are, aşa cum recunoaşte şi Hintikka, *intuiţia*[27]. Am văzut că, începând cu perioada critică, intuiţia este necesară construcţiei conceptelor în cunoaşterea matematică, mai exact intuiţia *pură*; spre deosebire de perioada pre-critică, această construcţie în intuiţie caracterizează metoda matematică aşa cum o vede Kant mai ales în *Critica* B („Estetica transcendentală"). Atunci când vorbeşte despre „metoda matematică",

[27] J. Hintikka, „Kant on the Mathematical Method", în *op. cit.*, p. 354.

Hintikka porneşte chiar de la acest aspect în studiul său[28], de la problema (intuiţiei) în construcţia matematică în perioadele pre-critică şi critică.

Precizăm că, atunci când Hintikka a scris textul, majoritatea studiilor despre filosofia matematicii la Kant se concentrau asupra pasajelor din „Estetica trancendentală”, partea din „Metodologia transcendentală” la care se referă în eseul său fiind considerată mai degrabă un apendice la problema filosofică legată de natura matematicii; de altfel, Hintikka este printre primii autori care au impus acest „loc” din *Critică* drept unul dintre posibilele „începuturi”[29] în orice analiză a statutului ştiinţei matematicii în filosofia kantiană; mai mult, el a susţinut că numai împreună cele două locuri din Kant ar trebui luate în considerare pentru orice analiză a problemei în discuţie[30]. Este cunoscut că, dincolo de pasajele din *Critică,* sunt multe alte locuri din alte lucrări ale lui Kant în care acesta are comentarii sau chiar analize extinse cu privire la matematică. Pentru a-şi susţine poziţia, dintre lucrările lui Kant relative la subiectul de faţă ignorate de exegeză la acea vreme, Hintikka s-a referit la primul paragraf din volumul ce reuneşte conferinţele lui Kant despre logică[31], la binecunoscuta *Disertaţie inaugurală* (1770), precum şi la lucrarea de tinereţe la care am făcut referire mai sus – *Prize Essay* (1763).

Fără să prezentăm pe larg cele susţinute de Hintikka în textul său, este important de sintetizat poziţia cu care acesta era în dispută, în speţă chiar „prima tradiţie” pe care am prezentat-o în introducere. În câteva cuvinte, această perspectivă, reprezentată de Russell aici, susţine că, întrucât în vremea lui Kant geometria euclidiană era ştiinţa despre spaţiu „oficială”, dar „incompletă”, pentru ilustrarea axiomelor lui Euclid se făcea apel la figuri şi desene, la construcţia de diagrame etc., Kant ar fi luat ca exemplare şi universale *aceste* procedee. Mai mult, ar fi considerat geometria euclidiană cu axiomele ei şi necesitatea construcţiei ca fiind ceva universal şi necesar pornind de la o situaţie, de fapt, particulară – căci aceste aspecte priveau doar geometria euclidiană, iar procedeele alese de Euclid ar fi fost impuse de incompletitudinea geometriei sale şi de lipsa instrumentelor logicii matematice (disponibile doar odată cu teoria mulţimilor a lui Cantor, de exemplu)[32].

Hintikka reproşează acestei poziţii absenţa încadrării filosofului german în contextul istoric mai larg, ţinându-se cont şi de consideraţiile sale precritice despre matematică sau de argumentele extinse ale doctrinei sale asupra spaţiului şi timpului; sau lipsa legăturii cu locurile din Kant unde este tratată matematica în general (este cunoscut că operele fundamentale kantiene conţin astfel de pasaje, într-adevăr, nesistematic). Am văzut că, odată cu „noua tradiţie”, cum am numit-o, aceste aspecte sunt considerate ca fiind ceva necesar oricărei analize a filosofiei matematicii la Kant.

[28] *Ibidem,* p. 352.

[29] În literatura de specialitate, „locul” consacrat analizei matematicii era „Estetica transcendentală” (A19/B33 şi urm.), unde Kant îşi expune doctrina despre spaţiu şi timp.

[30] *Ibidem,* p. 352.

[31] *Ibidem,* pp. 354–355 (vezi şi nota 4 de aici).

[32] Vezi *ibidem,* pp. 352–353.

Hintikka pune problema intuiţiei, ce înseamnă aceasta şi ce i se poate asocia. Spre deosebire de tradiţia cu care polemiza, care considera că intuiţia a priori poate fi asociată cu ceva asemănător unor „imagini mentale”, ceva ce face posibilă vizualizarea sau reprezentarea în imaginaţie, acesta susţine că un pas relevant pentru subiect este asumpţia lui Kant după care „fiecare idee particulară ca distinctă de conceptele generale este intuiţie”[33] sau că „orice reprezintă un individual este o intuiţie” – „intuitivitate înseamnă individualitate”. Un al doilea pas este acela în care această accepţiune este legată de „intuiţie” în „Estetica transcendentală”, însă nu ca un dat, ci *ca ceva ce trebuie demonstrat*: deci Kant arată în „Estetica...” atât că intuiţia este ceva particular iar nu general, cât şi că acest ceva trebuie să fie dat în sensibilitate – Hintikka insistă că legătura dintre sensibilitate şi intuiţii nu este una care să decurgă ca o consecinţă logică a definiţiei intuiţiei. O concluzie este că legătura dintre intuiţii şi sensibilitate trebuie avută în vedere numai odată cu „Estetica...”, nu înainte; prin urmare, dat fiind că „Metodologia...” a fost scrisă, cronologic, anterior „Esteticii...”, ar trebui ca termenul de „intuiţie” să fie luat în considerare în ultima lucrare ca „neintuitiv” (aşa cum era definită noţiunea anterior). În consecinţă, matematica s-ar baza pe construcţii care introduc reprezentări particulare ale unor concepte generale şi care scot la lumină argumente pentru aceste reprezentări particulare, ce nu pot fi susţinute doar de conceptele generale. În acest fel, „metodologia matematicii” sau doctrina lui Kant despre metoda matematicii este independentă de dovezile care leagă intuiţiile de sensibilitate, dezvoltate în „Estetică...”.

Interesant aici este firul argumentaţiei lui Hintikka, anume că, dat fiind că „Metodologia” este anterioară „Esteticii”, iar în prima Kant utilizează conceptul de construcţie în intuiţie ca „neintuitivă”, acesta este de fapt chiar punctul de plecare al argumentelor „Esteticii”, ceea ce înseamnă că poziţia lui Kant despre intuiţia pură ca strategie argumentativă nu este legată de geometria şi de diagramele lui Euclid din „Metodologie” şi, în consecinţă, nici ceea ce va spune în „Estetică”, ci invers: argumentul porneşte de la „Metodologie” şi urcă la „Estetică”, conform celor spuse de Kant în lucrarea dintre cele două ediţii ale *Criticii*, adică în *Prolegomene*[34]. Mai mult, în chiar argumentele despre spaţiu, Kant ar susţine conceptul de intuiţie „nonintuitivă”, ca însemnând „individualitate”, „individualul”[35].

De fapt, ceea ce Hintikka a încercat să arate este că perspectiva asupra (metodei) matematicii din lucrarea precritică din 1763 propune un concept de intuiţie „nonintuitiv” (în sensul precizat mai sus), că ea nu este incompatibilă cu interpretarea „tradiţională” din „Estetică..”: pe de o parte, o completă imagine mentală reprezintă un particular, şi din acest motiv reprezintă o intuiţie în sensul larg al definiţiei (ca „nonintuitivitate”); pe de altă parte, în mod obişnuit este mult mai uşor de lucrat cu instanţele particulare ale conceptelor generale decât cu conceptele generale însele – ele sunt mult mai intuitive în sensul „nonintuitivităţii” decât conceptele generale.

---

[33] Vezi *ibidem*, p. 354.
[34] Pentru o imagine detaliată, vezi *ibidem*, pp. 356–357.
[35] *Ibidem*, p. 356.

Nu insistăm acum asupra reconstrucţiei încercate de Hintikka argumentelor lui Kant din „Estetică..”, pe care el însuşi o recunoaşte ca parţială[36], nici asupra faptului că filosoful finlandez nu a pretins că reconstrucţia sa certifică corectitudinea poziţiei lui Kant, ci subliniem faptul că, după Hintikka, procedeul construcţiei în intuiţia pură a priori nu este altceva decât „introducerea unui nou individual reprezentând un concept general”.

Înainte de comentariul nostru, redăm concentrat discuţia şi concluziile analizei filosofului finlandez, care porneşte de la două asumpţii: 1) raţionamentul matematic are în vedere în mod principial individualele şi 2) rezultatele raţonamentului matematic sunt aplicabile întregii experienţe a priori; şi ajunge la următoarele concluzii: 3) existenţa individualelor cu care are a face raţionamentul matematic se datorează procesului prin care noi cunoaştem existenţa individualelor în general. Este vorba, desigur, nu despre individualele ca atare, ci despre cele care au o relaţie specială între ele: 4) relaţiile reciproce ale individualelor de care se preocupă raţionamentul matematic se datorează procesului prin care noi ajungem să cunoaştem existenţa acestor individuale. Aceste sisteme de relaţii mutuale este de aşteptat să fie reflectate de structura raţionamentului matematic; din acest punct de vedere, se pare că putem spune că Imm. Kant ar asuma faptul că 5) procesul prin care noi ajungem să ştim de existenţa individualelor în general este percepţia. Dar din 4) şi 5) urmează că 6) structura cunoaşterii matematice se datorează structurii aparatului nostru perceptiv. Această ultimă afirmaţie este o trăsătură de bază a doctrinei finale a lui Kant privind metoda matematică, complementară la ceea ce a realizat în „Estetică”.

Aici Hintikka sugerează că primele două asumpţii şi cea de-a patra pot fi plauzibil aplicate mai degrabă logicii, decât matematicii. Greşeala lui Kant ar fi în punctul 5), căci este destul de clar că necesitatea percepţiei cu tot ceea ce presupune aceasta este un element nu numai dispensabil, dar inutil în întreaga argumentaţie. Ca ilustrare a acestei remarci, Hintikka se întreabă, pe bună dreptate adăugăm noi, dacă, în acest context, numărul este cu adevărat un individual; poate nu, continuă filosoful finlandez, dar este clar că un număr a stat ca un individual pentru Kant atunci când a definit simbolurile algebrei ca intuiţii sau ca reprezentări ale individualelor. Afirmaţiile lui Kant în legătură cu percepţia ca instanţă de validare a individualelor reprezentate de simboluri sunt considerate de Hintikka fie o scăpare, fie o extensie a unei concepţii istoriste (psihologizante); prin urmare, propunerea sa este să interpretăm astfel 5): procesul prin care ajungem să cunoaştem existenţa individualelor este acela *al căutării lor*. În acest fel, avem concluzia următoare: 6) structura unui argument logic se datorează *structurii procesului corespunzător de căutare şi de găsire*.

Într-adevăr, reconstrucţia parţială realizată de Hintikka în ce priveşte filosofia matematicii a lui Kant ca aplicabilă mai degrabă logicii simbolice moderne decât matematicii sugerează actualitatea *in nuce* a gândirii matematice a filosofului german.

[36] *Ibidem*, p. 373.

În comentariul nostru, vom ţine cont şi de anumite concluzii ale unei abordări mai recente a subiectului în discuţie – este vorba despre lucrarea Ofrei Rechter[37] care, urmându-l pe Hintikka, analizează asumpţiile lui Kant privind metoda matematică şi relaţia cu aritmetica din lucrarea de tinereţe *Prize Essay*.

Aşa cum sublinia şi Hintikka, deşi lucrarea din 1763 nu poate fi invocată ca exprimând poziţia matură a lui Kant privind matematica, prezentate într-un context exegetic, unele aspecte tratate acolo pot arunca o oarecare lumină în legătură cu anumite elemente pe care le avem şi noi în vedere: raportul aritmeticii, pe de o parte, şi al geometriei, pe de alta, cu fundamentul acestor ştiinţe sau natura acestor ştiinţe şi conceptul de intuiţie. Am văzut că filosoful finlandez a insistat asupra caracterului logicist al acestui temei – el vorbea despre o logică implicată în simbolismul matematic şi despre sensul „nonintuitiv” al intuiţiei din perioada precritică cu referire la modalitatea de construcţie şi de validare a certitudinii matematice.

Cercetarea Ofrei Rechter subliniază diferenţe semnificative între aritmetică şi geometrie, reperabile încă din deja menționata lucrare din 1763. Autoarea susţine că, dacă viziunile pre-critice ale lui Kant despre matematică sunt interpretate exclusiv pe baza remarcilor despre geometrie, cu greu putem avea o imagine corectă despre matematica lui Kant: „concepția acestuia despre baza certitudinii aritmetice nu coincide cu concepția sa despre certitudinea în geometrie”, spune Rechter[38].

Autoarea porneşte ordonat, sistematic în a arăta că *definițiile* matematice sunt responsabile pentru asigurarea accesului cognitiv la obiectele conceptelor matematice. O caracterizare a formei generale a definițiilor matematice poate conduce mai apoi la scoaterea în evidenţă a diferenţelor dintre relațiile conceptelor geometrice și cele ale conceptelor aritmetice, precum şi la distingerea obiectelor lor[39]. Analiza se concentrează pe problema definiţiilor din matematică unde, aşa cum am văzut mai sus la Hintikka, în perioada pre-critică sursa nu era intuiţia pură a priori. Dintre științele matematice, aritmetica pură mai cu seamă produce „cunoaștere prin rațiune din construcția conceptelor”, consideră Rechter. Pe baza acestui fapt, Kant a susținut că în special cunoaşterea aritmetică poate fi intuitiv evidentă. A construi un concept înseamnă a „expune” conceptul în intuiție pură. Dar acest lucru echivalează cu a-l defini şi „în matematică nu avem niciun concept înainte de definiții”[40]. Din acest motiv este important să ne reamintim că, spune Rechter, în scrierile de tinereţe ale lui Kant, definițiile matematice nu doar clarifică sensul unui termen, așa cum fac definițiile lingvistice sau nominale, ci aduc ceva nou, contribuie cu ceva substanțial la cunoștințele noastre. Chiar şi în perioada pre-critică, acest „real” are conotaţii epistemologice; Kant nu își propune să stabilească teza conform căreia orice

[37] Ofra Rechter, *op. cit.*

[38] *Ibidem*, p. 25.

[39] *Ibidem.*

[40] Vezi *ibidem*, „Prefaţă”, p. 21.

concept matematic este definibil sau că orice definiție matematică este reală. Odată ce avem o definiție a unui concept matematic, faptul că definiția este reală se manifestă în suficiența semnelor propuse pentru a stabili cu certitudine cunoașterea matematică. O explicație a „realității" definițiilor matematice sintetice ar trebui să țină seama de sensul în care astfel de definiții sunt suficiente pentru a verifica propria lor adecvare și de modul în care își asigură „obiectele" proprii[41].

Referitor la raționamentul simbolic, reţinem şi noi una dintre aparentele diferenţe subliniate de Rechter între remarcile pre-critice și cele critice – este vorba despre o sursă aparent „perceptivă" în asigurarea certitudinii raţionamentelor simbolice. În *Critică* (A734/B762) avem referirea la algebră prin apel la o instanţă perceptivă, atunci când aceasta ne „asigură împotriva erorilor toate raţionamentele, prin aceea că fiecare dintre ele este prezentat în faţa ochilor". În *Prize Essay* doar aparent am avea aceeaşi aluzie la senzorial, căci aici Kant spune că raționamentul simbolic are „gradul de asigurare corespunzător unei vederi a ceva cu proprii ochi" în sensul „că nu s-a omis niciun concept, că fiecare ecuație a fost dedusă conform regulilor ușoare și sigure etc." (2:291). Asigurarea împotriva erorilor este garantată de respectarea condiției utilizării formalismului cerut conform regulilor, ceea ce autoarea consideră a fi o afirmație meta-teoretică despre formalism, cu totul distinct de orice dovezi de tip perceptiv. Într-adevăr, suntem de acord că este o afirmaţie epistemică despre necesitatea şi suficiența utilizării corecte a unui sistem de reguli într-un sistem de notare numerică[42].

Pentru discuţia noastră, reţinem din cele de mai sus sensul „non-senzorial" al controlului exercitat asupra corectitudinii raţionamentelor simbolice, sens prezent atât în lucrarea de tinereţie, cât şi în *Critică*. Un asemenea tip de control vine pe filiera aritmeticii, nu a geometriei, iar acum suntem în măsură să prezentăm încă un element important discutat de Rechter, „diferențele dintre geometrie și aritmetică în abordarea conceptelor și metodologiilor lor". În geometrie, accesul la concepte depinde, într-un fel sau altul, de „compararea" unei reprezentări cu altceva; ceea ce individualizează în geometrie o figură este „rețeta pentru construcția sa"; dar Kant introduce și ideea că figura geometrică „este similară cu lucrurile semnificate", iar această idee trebuie că joacă un rol în cogniția noastră a adecvării acestei rețete. În aritmetică, mai spune Rechter, definițiile sunt „formule într-o notație", iar corectitudinea lor nu depinde de corespondența între semne și acele lucruri. Semnele postate în aritmetică își datorează claritatea nu proprietăților comune între semn și obiect, ci mai degrabă unei afinități în modul lor de generare[43]. Poate cea mai însemnată diferenţiere între geometrie şi aritmetică/algebră la Kant este că, spre deosebire de geometrie, „în aritmetică nu există axiome" în sens matematic,

[41] *Ibidem*, p. 32.
[42] Vezi *ibidem*, p. 25.
[43] *Ibidem*.

iar aici relaţiile de tipul egalităţilor sunt numite „formule numerice” întrucât sunt „indemonstrabile” (A163–165/B204–206).

Vom încheia această ultimă parte cu o sintetică prezentare a specificităţii modului de funcţionare a simbolismului aritmetic în construcţia sistemelor de „semne” aritmetice ca „mijloace de cunoaștere”; ceea ce interesează aici, constituind și o particularitate în raport cu geometria, este puterea de generare şi de expansiune sintetică a legităţii matematice. Rechter reaminteşte că, în perioada conferinţelor dintre 1761–1764, Kant a remarcat în mod ingenios şi în detaliu caracterul generator al alfabetului şi caracteristicile principiilor pentru generarea semnelor numerice. În *Prize Essay*, filosoful german a arătat chiar cum ambele folosesc un principiu pentru generarea unei varietăți nelimitate de combinații distincte pe baza unei morfologii inițiale finite. În lucrarea la care ne referim, desfăşurarea kantiană este prezentată pe larg, noi reluăm însă mai jos doar o mică parte privitoare la tipul de formalism implicat – cel aritmetic.

În categoria „definiții”, sunt incluse doar primele 9 numere ale notării arabe zecimale după o anumită lege. Acestea sunt 1+1 = 2, 2+1 = 3, 3+1 = 4, ..., 8+1 = 9. Kant oferă apoi ceea ce par a fi dovezi pentru formule precum 8 + 4 = 12. Cum bine remarcă şi Rechter, acest lucru doar aparent intră în conflict cu declarația „critică” conform căreia astfel de propoziții, ca 7 + 5 = 12, sunt imediat sigure și nedemonstrabile (A163/B204). Într-adevăr, ele sunt, în perioada critică, considerate postulate sau „formule numerice” bazate pe postulate, care sunt „judecăți practice imediat sigure care nu necesită rezoluție sau dovadă”. Nu insistăm asupa explicaţiei, pertinente de altfel, a autoarei (care ne arată la început că nu este vorba despre „dovezi” în sensul epistemologic, ci despre o ilustrare pentru funcţia m+n cu argumente de la 1 la 9 cu o descriere a legăturii între ordonarea elementelor iniţiale prin operaţia „+1” şi egalităţile pentru n+m=k, unde n,m = cel mult 9). Ceea ce vedem, de fapt, este o reprezentare așa-zicând naivă a ceea ce vor deveni ulterior „axiomele lui Peano”, iar încercarea lui Kant este cu atât mai meritorie cu cât a urmat ambii paşi ai inducţiei.

Reţinem de aici sensul matematic al formalismului implicat în această prezentare a lui Kant din *Prize Essay*. Aşa cum observă şi Rechter, acest formalism se particularizează mai ales prin deosebita putere generativă a principiilor notației şi a legii de compoziţie, care garantează că orice șir numeral bine format este (unic) semnificativ și că orice secvență de astfel de șiruri generate va fi izomorfă cu secvența pentru care pretinde că stă. Simbolurile numerice își datorează relația cu ceea ce reprezintă structurii căreia îi aparțin, deoarece pot fi generate doar în conformitate cu principii guvernate de o anumită formă[44].

[44] *Ibidem*, pp. 33–36.

CONCLUZII

În întregirea răspunsului nostru la problema raportului dintre aritmetică (algebră) şi geometrie, aşa cum a fost tematizată în introducere, şi la poziţia lui Sutherland prezentată în prima parte adăugăm, în urma discuţiei de mai sus, două elemente: sensul restrâns al conceptului de intuitivitate („nonintuitivă”) implicată în cunoaşterea matematică din perioada pre-critică, preluat de Kant şi în *Critică* (J. Hintikka), precum şi specificitatea aritmeticii (algebrei) în raport cu geometria din răspunsul lui Kant (din *Prize Essay*) la întrebarea pusă de Academia de Ştiinţe din Berlin (O. Rechter).

În ceea ce priveşte ultimul aspect, Rechter conchide că introducerea aritmeticii în răspunsul lui Kant la întrebarea Academiei serveşte la dezvăluirea obstacolelor în calea atingerii certitudinii metafizice – în contrast cu certitudinea matematică – obstacole pe care nu le-am putea dezvălui dacă metafizica ar fi pusă în contrast doar cu geometria[45]. De aici reţinem că, dacă în geometrie și în metafizică accesul nostru la concepte se bazează – într-un fel sau altul – pe „compararea” unei reprezentări cu altele şi cu altceva, iar în geometrie ceea ce individualizează o figură este rețeta pentru construcția ei, care include o corespondenţă cu altceva prin asemănare (până la a fi „similar cu lucrurile semnificate”[46]), în aritmetică (algebră), *definițiile* (în sensul de mai sus) sunt „formule într-o notație”. De aici pot fi trase anumite consecinţe importante. Anume, că aceste formule însele se încadrează şi ca principii care alcătuiesc notația, deci funcţionează şi ca un fel de axiome. Mai mult, corectitudinea definițiilor sau a rezultatelor calculului nu depind de o asemănare cu ceva şi cu atât mai puţin presupun o corespondență între semne și acele obiecte. Aşa cum subliniază Rechter, „semnele propuse în aritmetică își datorează claritatea nu unor proprietăți comune între semn și obiect, ci mai degrabă unei *afinități în modul lor de generare* (s.n.)”[47]. Aceste elemente le conexăm acum cu sensul intuiţiei ca „nonintuitivă” (Hintikka) şi spunem: ceea ce asigură „sinteticul a priori” este puterea extraordinară de generare a algebrei prin expansiunea formalismului; dar cum este posibil acest lucru fără a considera strict *analiticitatea* (cum am văzut în prima parte că stau lucrurile în cazul lui Sutherland cu relaţiile *parte-întreg* şi de *egalitate*) şi/sau fără a face apel la experienţă?

Combinarea sugestiilor lui Hintikka de a înţelege intuiţia ca „neintuitivă” cu statutul special al aritmeticii (din *Prize Essay*), unde succesul matematicii (algebrei) este asigurat în afara unor asemănări sau deosebiri între obiecte (matematice), ne conduce la următoarea construcţie: reţinem distingerea din *Critica* B între *formele* pure a priori (spaţiul şi timpul), intuiţiile pure a priori şi intuiţiile empirice, corelând notele de *căutare* şi de *găsire* atribuite de Hintikka „argumentului logic”

[45] *Ibidem*, p. 39.
[46] *Ibidem*.
[47] *Ibidem*, p. 40.

cu metoda matematică a construcţiei în intuiţia pură (*Critica...*) sau cu procesul de evidenţiere în considerarea generalului în individual (*in concreto*) (*Prize Essay*), iar acestea cu sensul atribuit de Rechter procesului de control al validităţii raţionării şi expansiunii metodei matematice (în algebră); exprimat în cuvintele lui Kant din *Critică*, acest proces ne „asigură împotriva erorilor toate raţionamentele, prin aceea că fiecare dintre ele este prezentat în faţa ochilor..", ceea ce este echivalent cu ceea ce spunea acelaşi Kant în *Prize Essay*, că raționamentul simbolic are „gradul de asigurare corespunzător unei vederi a ceva cu proprii ochi" în sensul „că nu s-a omis niciun concept, că fiecare ecuație a fost dedusă conform regulilor ușoare și sigure, etc." (2:291). Căci, aşa cum sublinia Rechter, spre deosebire de construcţia geometrică, unde o figură geometrică reprezintă o pluralitate indefinită de instanțe posibile ale conceptului de triunghi, de exemplu, în aritmetică un *numeral* este una dintre numeroasele reprezentări simbolice posibile ale aceluiași număr, adică atât conţinutul expresiei cât şi necesitatea sunt date în ultimul caz *împreună*.

Deci, ceea ce ar indica o ordine fundamentală în construcţia în intuiţia pură, evident, nu este punerea în prima poziţie a analiticităţii (ea este deja presupusă!), nici a construcţiei în intuiţia pură a spaţiului, ci o construcţie ca generare şi urmărire a raţionamentului matematic în înlănţuirea metodei, cu o verificare constantă sau un control constant al corectitudinii raţionamentului prin verificare-validare a paşilor acestuia în conformitate cu regulile de extindere şi, în final, de aplicare la obiectele experienţei posibile. Acest tip de construcţie în intuiţia pură este specific algebrei şi este posibil prin sinteza apercepţiei transcendentale în determinarea timpului, condiţia universală a oricărei construcţii în intuiţia pură (în sensul precizat), care este suficientă aritmeticii (algebrei) şi necesară geometriei, înţelese aşa cum reiese din analizele acestui eseu. Căci, cum spunea Kant în *Critică* (B 762), „chiar şi posibilitatea matematicii trebuie arătată în filosofia transcendentală".