INFERENȚĂ PE DIAGONALĂ ȘI TRANZITIVITATE

GABRIEL ILIESCU

Universitatea Spiru Haret, București

DIAGONAL INFERENCE AND TRANZITIVITY

Abstract. The aim of this paper is to develop a more complex inferentional structure, starting from a relatively simple reasoning, containing identic indiscernibles. The approach has two parts. In the first part I exposed and symbolized a reasoning with two famous identicals in the history of knowledge. I introduced some remarks on identity, quantitative identity and qualitative identity, on transitivity, its middle term, and on the deduction theorem. In the second part I resumed the initial reasoning. I first applied the deduction theorem, and then transitivity. Then I showed the result: in two ways, both of them based on transitivity, a relatively new inference scheme can be obtained. It has in its premises only atoms of the form $t_1 = t_2$, and in conclusion only atoms of the form $R(t_1, \ldots, t_n)$. I applied this approach extending both the number of identicals and the arity of the atoms. The result is a general form of reasoning in which the particular case from which we started is a little more difficult to be recognized.

Keywords: identic indiscernibles, qualitative identitity, quantitative identity, deduction theorem, transitivity, middle term of transitivity.

1. IPOTEZĂ ȘI SCOP

Fie următorul *raționament* și *schema de raționare* alăturată lui:

Hesperus este identic cu Phosphorus.	$a_1 = b_{1.1},\ldots, b_{1.m-1} = b_{1.m}$
Hesperus este planetă.	.....
Prin urmare, Phosphorus este planetă.	$a_n = b_{n.1},\ldots, b_{n.m-1} = b_{n.m}$
	$S(a_1,\ldots, a_n) \supset S(b_{1.m},\ldots, b_{n.m})$

Întrebarea este dacă *există vreo legatură între cele două.* Răspunsul presupune cunoscut limbajul logicii predicatelor de ordinul 1. *Raționamentul* din stânga conține un predicat monadic și doi identici, din punctul de vedere al simbolizării în limbajul arătat. *Schema de raționare* din dreapta conține un predicat *n*-adic, și câte *m* identici, pentru fiecare termen.

Scopul este de a expune etapele construirii schemei de raționare generale pornind de la raționamentul din stânga. *Ipoteza* implicită este că între raționamentul și schema arătate *există o legătură*.

Răspunsul la întrebare, doar schițat acum, este că legătura o asigură termenii-cheie *identitatea, teorema deductiei* și *tranzivitatea*.

Demersul conține două părți. Prima parte conține referiri scurte și strict necesare aici, referitoare la conceptele folosite. Partea a doua conține dezvoltarea treptată a schemei anunțate.

1.1. IDENTITATE CANTITATIVĂ *VERSUS* CEA CALITATIVĂ

1.1.1. *Este* în sens predicativ și ca parte din ...*identic cu*...

Extragem raționamentul de pornire din principiul substituției identicilor[1]. Reținem doar propoziții precum „Hesperus este planetă", adică doar contextul vorbirii directe. Nu-l încorporăm în „x crede Hesperus este planetă", care ține de vorbirea indirectă[2].

Identitatea se regăsește în două sensuri: cantitativ și calitativ. Aici nu interesează identitatea calitativă[3]. Acesta ar putea fi cazul gemenilor confundați[4]. De exemplu, Antipholus din Syracuza și identicul său omonim din Efes au exact aceleași proprietăți, exceptând-o cel puțin pe una: localitatea de proveniență menționată. Ceea ce nu știe un anume agent epistemic[5]. Or, Hesperus și Phosphorus au toate proprietățile comune, fără excepție. Hesperus nu este doar o copie a lui Phosphorus, în timp ce ar continua să fie diferit[6]. Cele două sunt identice cantitativ, numeric. Este unul și același obiect, nu două[7].

În cele ce urmează, avem două feluri de propoziții: „Hesperus este identic cu Phosphorus" și apoi „Hesperus este planetă" [8]. Concluzia este „Phosphorus este planetă"[9].

Remarcăm că „este" apare în ambele feluri de propoziții. Dar sensurile sunt diferite. În prima apariție prezența doar a lui „este" are sens de *identitate*. În cea de a doua „este" are sens de *predicație*[10].

---

[1] Dumitru Gheorghiu, *Aspecte ale atribuirilor de atitudini propoziționale*, în *Existență, Contradicție, Adevăr*, Editura Trei, București, 2005, p. 33.

[2] *Ibidem*.

[3] Dumitru Gheorghiu, *Introducere în Filosofia Minții*, curs universitar, vol. I, Editura Trei, București, 2015, p. 31.

[4] Ben Dupre, *50 de idei pe care trebuie să le cunoști, Filosofie*, trad. Doru Căstăian, Editura Litera, București, 2017, p. 25.

[5] *Ibidem*.

[6] Gheorghiu, *op. cit*.

[7] *Ibidem.*

[8] Dumitru Gheorghiu, *Aspecte ale atribuirilor de atitudini propoziționale*, p. 33.

[9] *Ibidem*.

[10] Graham Priest, *Logica, o foarte scurtă introudcere*, trad. Gabriel Tudor, Editura Litera, București, 2020, p. 87.

Identitatea „=” apare la unii autori ca axiomă[11]. Alții o consideră doar ca regulă[12]. În ambele cazuri este prezentă proprietatea de *comutativitate*.

Uneori, exprimarea naturală prescurtează pe „este identic cu” prin „este”. Să presupunem că, în loc de „Hesperus” am fi avut „*John*” și în loc de „*Phosphorus*”, „*persoana care a câștigat cursa*”. Atunci am fi avut propoziția „John *este* persoana care a câștigat cursa”[13]. Ar fi trebuit distins între „este” cu sens *predicativ* și „este” ca prescurtare de la „este același cu”, deci cu sens de *identitate*. Distincția între cele două sensuri se poate face prin comutativitate.

Dacă o propoziție în care apare „este” nu este comutativă, acea propoziție exprimă *predicația*. Astfel, „Hesperus este planetă” devine „planetă este Hesperus”. Ceea ce arată că propoziția nu este comutativă. Deci, aici „este” are sens de *predicație*. Pe când „John *este* persoana care a câștigat cursa”[14] devine „persoana care a câștigat cursa *este* John”[15]. Similar, chiar dacă am fi avut „Hesperus este Phosphorus”, comutând, am fi avut „Phosphorus este Hesperus”. Ambele fiind comutative, urmează că „*este*” are sens de *identitate*.

1.1.1.1. Raționamentul este valid

Ne limităm la a introduce convențiile de notare: *a* pentru *Hesperus*; *b* pentru *Phosphorus*; *P* pentru *planetă*. Construim atomul *P(a)* care înseamnă că *a* este *P* sau *a are proprietatea* P, mai exact că *Hesperus este planetă*.

Adăugăm convenția că prin „=” înțelegem *este identic cu* sau *este același cu*. Construim atomul *a = b*. Ceea ce interpretăm prin *a este identic cu b,* și mai direct, prin *Hesperus este identic cu Phosphorus*. Avem astfel datele pentru un raționament de forma:

Grila nr. 1

1. Hesperus este identic cu Phosphorus.	a = b
2. Hesperus este planetă.	P(a)
3. Prin urmare, Phosphorus este planetă. .	P(b)

Folosim ideea că un raționament este valid ddacă conjuncția dintre premisele și negația concluziei sale alcătuiesc o contradicție. De aceea, valorizăm premisele ca adevărate și concluzia ca falsă: *Este fals că Phosphorus este planetă, ~P(b)*. Dar concluzia a fost obținută prin înlocuirea lui *Hesperus*, *a,* cu *Phosphorus, b.* Pe baza premisei 1 reînlocuim pe *b* cu *a.* Obținem *Este fals că Hesperus este*

[11] Eugen Mihăilescu, conform cu Gheorghe Enescu, *Logica identității*, în *Paradoxuri, Sofisme, Aporii*, ediție îngrijită de Iancu Lucica, Editura Tehnică, București, 2003, p. 291.
[12] *Ibidem*.
[13] Graham Priest, *op. cit*.
[14] *Ibidem*.
[15] *Ibidem.*

planetă, ~P(a). Aceasta este contradictoria lui *Hesperus este planetă, P(a)*. Astfel, deținem următoarele trei propoziții. Ultimele două sunt reciproc contradictorii:

Grila nr. 2

1. Hesperus este identic cu Phosphorus.	a = b
2. Hesperus este planetă.	P(a)
3. Este fals că Hesperus este planetă.	~P(a)

Dacă ultimele două propoziții sunt contradictorii, atunci și extinderea lor cu *a = b* este, de asemenea, contradictorie. Așadar am obținut o contradicție. Prin urmare, raționamentul inițial este valid. Condițiile semantice ale contradicției se presupun cunoscute[16]. O urmare indezirabilă a acesteia este deducția explozivă: $\{A, \sim A\} \vdash B$[17]. Însemnând că se poate deduce inclusiv ceva fără legătură de conținut cu premisele. Așadar, „raționament deductiv valid" înseamnă că dacă valorizăm premisele ca adevărate și concluzia ca falsă, atunci obținem o deducție explozivă.

1.1.2. Aplicând teorema deducției

Teorema menționată este folosită aici foarte restrâns. În funcție de limbaj, aceasta se aplică în mod specific. Raționamentul inițial este în limbajul logicii predicatelor și conține doar predicate monadice, atomi cu identitate și constante individuale.

Teorema deducției este folosită în sistemele axiomatice, unde deducția este laborioasă, uneori. Rolul ei este de a scurta unele demersuri demonstrative[18] sau de a le face mai intuitive[19]. Dar teorema se aplică, nu doar în axiomatică, ci și la domenii de cercetare în care se deduce din date factuale și clauze generale[20]. Teorema spune că:

Γ este un set de ipoteze și A este o ipoteză distinctă de Γ.
Dacă din Γ și A se deduce B, atunci din Γ se deduce $A \supset B$[21].

---

[16] Dumitru Gheorghiu, *Intuiționism*, *Paraconsistență, Contrarietate și Subcontrarietate*, în *Existență, Contradicție, Adevăr*, Editura Trei, București, 2005, p. 110.

[17] Graham Priest, *Cuvânt înainte*, în Lucica Iancu, Dumitru Gheorghiu, Roman Chirilă (coordonatori), *Ex falsum quodlibet, Studii de Logică Paraconsistentă*, Editura Tehnică, colecția Cogito, București, 2004, p. V.

[18] Cornel Popa, *Logică și metalogică,* vol. II, Editura Fundației *România de Mâine*, București, 2002, p. 66.

[19] *Ibidem*, p. 89.

[20] *Ibidem*, p. 76.

[21] *Ibidem*, p. 62, p74.

Grila nr. 3. Teorema deducției

1. $\Gamma, A \vdash B$
2. $\Gamma \vdash A \supset B$[22]

În cazul axiomaticii se conservă validitatea. În cazul raționamentelor din ipoteze se conservă adevărul despre obiectele din domeniul de referință[23]. Este numită teorema celor trei implicații[24]. În expunerea orizontală a acesteia, cele trei implicații sunt: *dacă...atunci...*, între inferența-premisă și inferența-concluzie, apoi $\vdash$, $\supset$[25]. Alți autori o numesc și teorema ce mută formulele spre dreapta semnului $\models$[26]. Este valabil și pentru varianta cu semnul $\vdash$.

În expresia de mai sus, substituim: *Γ/a = b; A/P(a); B/P(b)*. Teorema este aplicată la raționamentul din stânga (jos). Obținem un metaraționament, pentru că atât premisa, cât și concluzia sunt tot raționamente. Premisa este $a = b, P(a) \vdash P(b)$ și este validă. Iar concluzia este $a = b \vdash P(a) \supset P(b)$. Aceasta este obținuntă prin trecerea lui *P(a)* în dreapta semnului $\vdash$. Ceea ce generează tot un raționament valid.

Grila nr. 4. Aplicarea teoremei deducției

a = b P(a) P(b)	a = b, P(a) ⊢ P(b) a = b ⊢ P(a) ⊃ P(b)	1. Hesperus este identic cu Phosphorus. Hesperus este planetă. Prin urmare, Phosphorus este planetă. 2. Hesperus este identic cu Phosphorus. Prin urmare, dacă Hesperus este planetă, atunci Phosphorus este planetă.

Din metaraționamentul de mai sus, detașăm concluzia $a = b \vdash P(a) \supset P(b)$. O rescriem vertical, prin raționamentul din mijloc, jos. Premisa este $a = b$. Concluzia este $P(a) \supset P(b)$. Acestuia îi asociem interpretarea în limba naturală.

---

[22] *Ibidem*., p. 62.

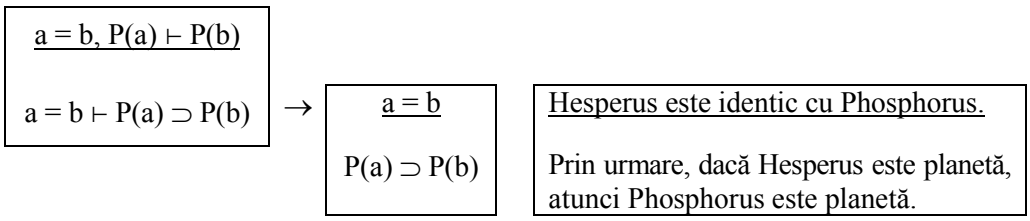
[23] *Ibidem*, p. 76.

[24] Alfred Tarski, Stephen Givant, *A formalization of set theories without variabiles*, în *American Coloquium Publications*, vol. 41, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1987, p. 9.

[25] Alfered Tarski, Givant, *op. cit.*, p. 9.

[26] Wilfried Hodges, *Elementary Predicate Logic*, în *Handbook of philosophical logic*, second edition, edited by Dov M. Gabbay and F. Guenthner, vol. 1, p. 16.

Grila nr. 5. Degajarea raționamentului concluziv al teoremei deducției



1.1.3. Tranzitivitate

Tranzitivitatea apare în dublă ipostază: ca *proprietate formală de relații* și ca *regulă*, primă sau derivată, în context axiomatic. Apoi, ea este o schemă de raționare validă.

1.1.3.1. Tranzitivitatea ca proprietate formală de relații

În funcție de autor, aceasta beneficiază de atenție mai mult sau mai puțin generoasă. Unii autori nu-i acordă un articol aparte, ci o includ într-unul despre relație[27]. Ca *proprietate formală de relații*, este un predicat de al doilea ordin: *Trans*. Relația, fie aceasta *R*, este un predicat de ordinul 1. Construim astfel o expresie de forma: *Trans(R)*[28], R este tranzitivă, redată astfel:

$$Trans(R) = \forall x\, y\, z((xRy \,\&\, yRz) \supset xRz)$$[29]

În care R poate fi înlocuit cu =, $\|$, <, $\supset$[30]. Dintre acestea prezintă interes pentru preocuparea de față doar =, $\supset$ dar și $\vdash$.

1.1.3.2. Tranzitivitatea în context axiomatic

Două idei menționăm în legătură cu tranzitivitatea: una este despre *istorie*, cealaltă despre *sintaxă*. Pentru ambele scopuri, dăm două formulări ale tranzitivității. Oferim astfel suport de referință pentru o analiză scurtă a *componenței sintactice*. Contextul axiomatic considerat este cel al logicii propoziționale.

---

[27] Anthony Flew, *Dicționar de filosofie și logică*, traducere Drăgan Stoianovici, Editura Humanitas, București, 2006, p. 409, p. 344.

[28] Gheorghe Enescu, *Tratat de logică*, Editura Lider, București, 1997, p. 283.

[29] *Ibidem*.

[30] *Ibidem*.

Grila nr. 6. Două expresii ale tranzitivității

$A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$[31]	$\frac{A \supset B, B \supset C}{A \supset C}$[32]

Istoric, tranzitivitatea apare în sistemul de logică propozițională Hilbert – Ackermann[33]. Problema este dacă tranzitivitatea este o *regulă derivată de la o teoremă* sau o *regulă primă*, nederivată, alături de substituție și detașare.

Fie varianta de mai sus, din stânga folosită de către Gh. Enescu: dacă este dovedită o formulă $A \supset B$ și este dovedită și $B \supset C$, atunci este dovedită și $A \supset C$[34]. Autorul o menționează ca *a-III-a regulă primă* în sistemul amintit[35]. Acesta reproduce demonstrația celor doi autori, care o consideră regulă *derivată*[36]. Prin aceasta, Enescu arată că demonstrația este în cerc vicios[37]. De aceea propune trecerea ei în rândurile regulilor prime[38].

Cea de a doua formulare[39] este menționată de către unul dintre discipolii săi[40], Dumitru Gheorghiu. Acesta arată, de asemenea, că Enescu propune eliminarea circularității prin transformarea tranzitivității, în regulă primă[41].

Totuși, ulterior, Enescu expune același sistem astfel, tranzitivitatea apărând ca regulă derivată din prima teoremă[42]. Dar, într-o notă de subsol, autorul trimite la un articol al său anterior, în care prezentase tranzitivitatea ca regulă primă[43].

1.1.3.3. Tranzitivitate, termen mediu și diagrame Euler

În ambele forme arătate, tranzitivitatea este o schemă de raționare validă, conținând trei *elemente* și o *relație*. Reține atenția al doilea element, *termenul mediu*, B. În legătură cu acesta distingem: 1. cele două *apariții* ale sale: prima, în consecventul implicației, $A \supset B$, fie aceasta B_1 și a doua, în antecedentul

[31] Gheorghe Enescu, *Axiomatica Logicii Propozițiilor*, în vol. *Paradoxuri, Sofisme, Aporii, Studii logic-filosofice*, ediție îngrijită de Iancu Lucica, Editura Tehnică, București, 2003, pp. 245–247.

[32] Dumitru Gheorghiu, *Contribuții în logica simbolică și Dicționarul de Logică al lui Enescu Gheorghe*, în vol. *Istoria Logicii Românești*, coord. Alexandru Surdu, Dragoș Popescu, Editura Tehnică, București, 2006, p. 598.

[33] Gheorghe Enescu, *op. cit.*, p. 245.

[34] *Ibidem.*

[35] *Ibidem.*

[36] *Ibidem*, p. 246.

[37] *Ibidem*, pp. 246–247.

[38] Iancu Lucica, *Gheorghe Enescu – omul, logicianul, filosoful. Studiu introductiv*, în vol. *Paradoxuri, Sofisme, Aporii, Studii logico-filosofice*, ediție îngrijită de Iancu Lucica, Editura Tehnică, București, 2003, p. 11.

[39] Dumitru Gheorghiu, *op. cit.*, p. 598.

[40] *Ibidem*, p. 601.

[41] *Ibidem*, p. 598.

[42] Gheorghe Enescu, *Logica simbolică*, Editura Științifică, București, 1971, p. 74.

[43] *Ibidem*.

implicației $B \supset C$, fie aceasta B_2[44]; 2. *mulțimea de variabile* ce compune B_1, V_{B1} și mulțimea de variabile ce compune B_2, V_{B2}. Explicit, „mulțimea de variabile ce compune B_1", sau V_{B1} înseamnă mulțimea de variabile ce compune prima apariție a termenului mediu.

Ambele apariții ale termenului mediu sunt identice: $V_{B1} \equiv V_{B2} \equiv \{B\}$. Iar aceasta este doar un caz particular, de relație euleriană, anume identitatea între cele două mulțimi. Acesta este singurul caz cu care ne confruntăm aici.

1.1.3.4. Aplicarea tranzitivității clasice

Componentele termenului mediu pot fi constante individuale sau atomi predicativi. Specificăm *elementele* și *relațiile*, din componența tranzitivității. *Elementele* sunt Hesperus, *a*, Phosphorus, *b*. La acestea adăugăm numele planetei Venus, *c*. *Relațiile* sunt: =, ⊃, ⊢. Concluzia se obține pe două traiectorii. Cele două coincid în punctul de pornire și în concluzie și difera prin termenul mediu prin care trec:

traiectoria 1 compusă dintr-un prim segment orizontal (o_1) a = b, b = c ⊢ $a = c$; și al doilea segment, care este vertical (v_2) $a = c \vdash P(a) \supset P(c)$. *Termenul mediu* al traiectoriei 1 este concluzia $a = c$.

traiectoria 2, compusă dintr-un prim segment vertical ($v_{1.1}$) $a = b \vdash P(a) \supset P(b)$, și ($v_{1.1}$) $b = c \vdash P(b) \supset P(c)$. Al doilea segment este orizontal (o_2) $P(a) \supset P(b)$, $P(b) \supset P(c) \vdash P(a) \supset P(c)$. *Termenul mediu* al traiectoriei 2 constă în concluziile $P(a) \supset P(b)$ si $P(b) \supset P(c)$.

Inferența pe diagonală rezultă prin parcurgerea celor două traiectorii. Inferența relaționează direct premisele de tip $t_1 = t_n$ și concluzia care are forma unei implicații între atomi de tip $R(t_1, \ldots, t_n)$.

$$[(a = b \,\&\, b = c \vdash a = c) \,\&\, (a = c \vdash P(a) \supset P(c)] \vdash (a = b \,\&\, b = c \vdash P(a) \supset P(c))$$

În continuare, expunem grile cu câte trei secțiuni: raționamentul cu identici indiscernabili, aplicarea teoremei deducției și tranzitivitatea. Începem cu atomi predicativi monadici, continuăm cu cei diadici, încheiem cu atomi *n* – adici.

[44] Gabriel Iliescu, *Diagramele Euler și Tranzitivitatea*, în *Analele Universității „Spirut Haret"*, seria Studii de Filosofie, nr. 10, 2008, Editura Fundației România de Mâine, București, 2008, p. 146.

2. IDENTICI, TEOREMA DEDUCȚIEI ȘI TRANZITIVITATE

2.1. PREDICAT MONADIC. DOI IDENTICI. TRAZITIVITATE CU TREI IDENTICI

Sintetizăm cele de pâna acum. În stânga avem raționamentul de pornire, valid, conținând identici indiscernabili. La mijloc este rezultatul teoremei deducției. În dreapta este tranzitivitatea care poate fi parcursă pe cele două traiectorii.

Grila nr. 7

Raționament cu identici și Teorema deducției		*Teorema deducției și tranzitivitate cu trei identici*			
1	2	3			
a = b	a = b	a = b	b = c	⊢	a = c
P(a)	P(a) ⊃ P(b)	P(a) ⊃ P(b)	P(b) ⊃ P(c)	⊢	P(a) ⊃ P(c)
P(b)					

inferența pe diagonală este: $a = b, b = c \vdash P(a) \supset P(c)$.

2.1.1. *n-1* identici. Trazitivitate cu *n* identici

Șirul de identici poate extins finit: $a_{1,\ldots,} a_{n-1}, a_n$. Odată cu el se extinde și numărul de atomi cu identitate, dar și de implicații.

Grila nr. 8.1. Raționament cu n-1 identici și Teorema deducției

$a_1 = a_2 \ldots a_{n-2} = a_{n-1}$	$a_1 = a_2 \ldots a_{n-2} = a_{n-1}$
$P(a_1)$	$P(a_1) \supset P(a_{n-1})$
$P(a_{n-1})$	

Pentru a avea o tranzitivitate, introducem al n-lea termen a_n.

Grila nr. 8.2. Teorema deducției și tranzitivitate cu n identici

$a_1 = a_2 \ldots$	$\ldots a_{n-2} = a_{n-1}$	$a_{n-1} = a_n$	⊢	$a_1 = a_n$
$P(a_1) \supset P(a_2) \ldots$	$\ldots P(a_{n-2}) \supset P(a_{n-1})$	$P(a_{n-1}) \supset P(a_n)$	⊢	$P(a_1) \supset P(a_n)$

Inferența pe diagonală este: $a_1 = a_2 \ldots a_{n-2} = a_{n-1}, a_{n-1} = a_n \vdash P(a_1) \supset P(a_n)$.

2.2. PREDICAT DIADIC. DOI IDENTICI. TRAZITIVITATE CU TREI IDENTICI

Predicatele descriu nu doar însușiri, dar și relații între obiecte. Provizoriu, considerăm câte un identic asociat fiecărui termen. Pentru primul termen, a_1, avem doar b_1. Pentru al doilea termen, a_2, avem doar b_2. Evident, spre deosebire de predicatele monadice avem un atom cu identitate în plus.

Grila nr. 9.1. Raționament cu câte doi identici și Teorema deducției

$a_1 = b_1$	$a_1 = b_1$
$a_2 = b_2$	$\underline{a_2 = b_2}$
$\underline{R(a_1, a_2)}$	$R(a_1, a_2) \supset R(b_1, b_2)$
$R(b_1, b_2)$	

Pentru a avea o tranzitivitate, introducem al treilea termen *c*. Astfel, echivalentul lui b_1 este c_1. Iar pentru b_2 echivalentul este c_2.

Grila nr. 9.2. Teorema deducției și tranzitivitate cu câte trei identici

$a_1 = b_1$	$b_1 = c_1$	$\vdash$	$a_1 = c_1$
$\underline{a_2 = b_2}$	$\underline{b_2 = c_2}$	$\underline{\vdash}$	$\underline{a_2 = c_2}$
$R(a_1, a_2) \supset R(b_1, b_2)$	$R(b_1, b_2) \supset R(c_1, c_2)$	$\vdash$	$R(a_1, a_2) \supset R(c_1, c_2)$

Inferența pe diagonală este: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, b_1 = c_1, b_2 = c_2 \vdash R(a_1, a_2) \supset R(c_1, c_2)$.

2.2.1. *n-1* identici. Trazitivitate cu câte *n* identici

Menținem același predicat $R(a_1, a_2)$. Iar a_1 are ca echivalenți: $b_{1.1},...., b_{1.n-2}, b_{1.n-1}$. Iar a_2 are ca echivalenți: $b_{2.1},..., b_{2.n-2}, b_{2.n-1}$.

Grila nr. 10.1. Raționament cu câte n-1 identici și Teorema deducției

$a_1 = b_{1.1},...., b_{1.n-2} = b_{1.n-1}$	$a_1 = b_{1.1},...., b_{1.n-2} = b_{1.n-1}$
$a_2 = b_{2.1},..., b_{2.n-2} = b_{2.n-1}$	$\underline{a_2 = b_{2.1},..., b_{2.n-2} = b_{2.n-1}}$
$\underline{R(a_1, a_2)}$	$R(a_1, a_2) \supset R(b_{1.n-1}, b_{2.n-1})$
$R(b_{1.n-1}, b_{2.n-1})$	

Pentru tranzitivitate, introducem al *n*-lea termen. Ultimul echivalent al lui a_1 nu mai este $b_{1.n-1,}$ ci $b_{1.n}$. La fel, pentru a_2, ultimul echivalent, nu mai este $b_{2.n-1,}$ ci $b_{2.n}$.

Grila nr. 10.2. Teorema deducției și tranzitivitate cu câte n identici

$a_1 = b_{1.1}$	....	$b_{1.n-1} = b_{1.n}$	$\vdash$	$a_1 = b_{1.n}$
$\underline{a_2 = b_{2.1}}$	....	$\underline{b_{2.n-1} = b_{2.n}}$	$\underline{\vdash}$	$\underline{a_2 = b_{2.n}}$
$R(b_{1.n-1}, b_{2.n-1})$	....	$R(b_{1.n-1}, b_{2.n-1}) \supset R(b_{1.n}, b_{2.n})$	$\vdash$	$R(b_{1.n-1}, b_{2.n-1}) \supset R(b_{1.n}, b_{2.n})$

Inferența pe diagonală este:

$a_1 = b_{1.1,.....,}b_{1.n-1} = b_{1.n,}\, a_2 = b_{2.1,.....,}\, b_{2.n-1} = b_{2.n} \vdash R(b_{1.n-1}, b_{2.n-1}) \supset R(b_{1.n}, b_{2.n})$

2.3. PREDICAT N-ADIC. DOI IDENTICI. TRAZITIVITATE CU TREI IDENTICI

Aritatea predicatului este generalizată la *n* termeni: $a_1,..., a_{n-1}$. Considerăm doar câte doi identici pentru fiecare termen. Astfel, a_1 are ca identic doar pe b_1, a_2 doar pe $b_2,..., a_{n-1}$ îl are doar pe b_n.

Grila nr. 11.1. Raționament cu câte doi identici. Teorema deducției

$a_1 = b_1$	$a_1 = b_1$
....=.....	....=.....
$a_n = b_n$	$\underline{a_n = b_n}$
$\underline{S(a_1,..., a_n)}$	$S(a_1,..., a_n) \supset S(b_1,..., b_n)$
$S(b_1,..., b_n)$	

Pentru tranzitivitate, introducem al treilea echivalent. Al treilea și ultim echivalent al lui a_1 este $b_{1.2}$. Pentru a_n, al treilea și ultim echivalent este $b_{n.2}$.

Grila nr. 11.2. Teorema deducției și tranzitivitate cu trei identici

$a_1 = b_{1.1}$	$b_{1.1} = b_{1.2}$	$\vdash$	$a_1 = b_{1.2}$
....	....	$\vdash$	....
$\underline{a_n = b_{n.1}}$	$\underline{b_{n.1} = b_{n.2}}$	$\underline{\vdash}$	$\underline{a_n = b_{n.2}}$
$S(a_1,.., a_n) \supset S(b_{1.1},.., b_{n.1})$	$S(b_{1.1},.., b_{n.1}) \supset S(b_{1.2},..,b_{n.2})$	$\vdash$	$S(a_1,.., a_n) \supset S(b_{1.2},.., b_{n.2})$

Inferența pe diagonală este:

$a_1 = b_{1.1}, b_{1.1} = b_{1.2}$ .....$a_n = b_{n.1}, b_{n.1} = b_{n.2} \vdash S(a_1,..., a_n) \supset S(b_{1.2},..., b_{n.2})$

2.3.1. m-1 identici. Trazitivitate cu câte *m* identici

Menținem predicatul $S(a_1,.., a_n)$. Extindem numărul de identici pentru fiecare termen. Astfel, a_1 are ca echivalenți: $b_{1.1},..., b_{1.m-2}, b_{1.m-1}$. În final, a_n are ca echivalenți: $b_{n.1},..., b_{n.m-2} = b_{n.m-1}$.

Grila nr. 12.1. Raționament cu m-1 identici și teorema deducției

$a_1 = b_{1.1},..., b_{1.m-2} = b_{1.m-1}$	$a_1 = b_{1.1},..., b_{1.m-2} = b_{1.m-1}$
....	....
$a_n = b_{n.1},..., b_{n.m-2} = b_{n.m-1}$	$\underline{a_n = b_{n.1},..., b_{n.m-2} = b_{n.m-1}}$
$\underline{S(a_1,..., a_n)}$	$S(a_1, ..., a_n) \supset S(b_{1.m-1},..., b_{n.m-1})$
$S(b_{1.m-1},..., b_{n.m-1})$	

Pentru tranzitivitate, introducem al *m*-lea echivalent. Astfel, al *m*-lea echivalent și ultim echivalent al lui a_1 este $b_{1.m}$. Pentru a_n, al *m*-lea și ultim echivalent este $b_{n.m}$.

Grila nr. 12.2. Teorema deducției și tranzitivitate cu câte m identici

$a_1 = b_{1.1},...,$	$,..., b_{1.m-1} = b_{1.m}$	$\vdash$	$a_1 = b_{1.m}$
....	....	$\vdash$	....
$\underline{a_n = b_{n.1},...,}$	$\underline{,..., b_{n.m-1} = b_{n.m}}$	$\vdash$	$\underline{a_n = b_{n.m}}$
$S(a_1,.., a_n) \supset S(b_{1.1},.., b_{n.1})...$	$S(b_{1.m-1},.., b_{n.m-1}) \supset S(b_{1.m},..,b_{n.m})$	$\vdash$	$S(a_1,.., a_n) \supset S(b_{1.m},.., b_{n.m})$

Inferența pe diagonală este:

$a_1 = b_{1.1},..., b_{1.m-1} = b_{1.m}$.....$a_n = b_{n.1},..., b_{n.m-1} = b_{n.m} \vdash S(a_1,..., a_n) \supset S(b_{1.m},..., b_{n.m})$

3. OBSERVAȚII ȘI REMARCI CONCLUZIVE

Am folosit trei feluri de inferențe. Revenim asupra celor mai simple, din grila 7. Inferența pe diagonală, $a = b,\ b = c \vdash P(a) \supset P(c)$, este doar un pic mai complicată decât 2, punând aceeași problemă. De aceea, ne referim doar la 1, 2 și 3. Iar 3 are două variante. Acestea diferă doar prin atomii pe care îi conțin. O variantă a lui 3 conține doar atomi de tipul $t_1 = t_2$,. Cealaltă variantă conține doar atomi de tipul $R(t_1, ..., t_n)$, în care $n = 1$. Centrăm atenția asupra inferenței 2.

a) Presupunem că, valorizând premisele ca adevărate și concluzia acestora ca falsă, obținem o contradicție. *Concluzia este dată*, deci *nu* trebuie *obținută.* Astfel, doar am *verificat* că inferența este validă. Acest procedeu este aplicabil tuturor celor trei inferențe selectate, inclusiv lui 2 (grila 7). Astfel, concluzia $P(a) \& \sim P(b)$ este o contradicție. Deoarece $P(a) \& \sim P(a)$ este o contradicție. Și conform premisei, *a* este identic cu *b*. Iar dacă $P(a) \& \sim P(b)$ este o contradicție, atunci și $a = b \& P(a) \& \sim P(b)$ este de asemenea contradicție.

Varianta de verificare a validității prin *contradicția dintre adevărul premiselor și negația concluziei* – care este dată – funcționează pentru toate inferențele selectate.

b) Valorizăm premisele ca adevărate. Principiul identității[45] ne constrânge ca ceea ce am valorizat în premise ca adevărat, să valorizăm și în concluzie, tot ca adevărat. În cazul simplu, al lui modus ponens, presupus cunoscut, adevărul premiselor înseamnă inclusiv adevărul consecventului implicației. Or, concluzia este chiar acest consecvent. Prin urmare, și concluzia trebuie valorizată tot ca adevărată, conform principiului arătat. Și aici, concluzia este dată, deci nu trebuie obținută.

Fie inferența 1 (grila 7). Întrucât premisele sunt adevărate, valorizarea ca adevărat a lui $P(b)$ este o aplicare a principiului identității. $P(b)$ este un alt fel de a spune $P(a)$ întrucât $a = b$. Iar identicii sunt reciproc substituibili. Valorizând ca adevărat $P(a)$ în premisă, trebuie să-l valorizăm la fel în concluzie. Aceasta chiar dacă îl găsim ca $P(b)$.

Fie inferența 3 (grila 7) în varianta ce conține atomii $P(a), P(b)$. Chiar și dacă valorizăm toți atomii premiselor ca falși, suntem constrânși să valorizăm la fel ambii atomi din concluzie. Ceea ce, asigurând adevărul premiselor, impune și adevărul concluziei.

Varianta de verificare a validității, aici prin constrângerea de către *principiului identității*, funcționează. Pentru ambele inferențe: *doar verificăm* prezența relației de consecință logică*,* iar concluzia nu este *obținută*, ci este *dată.*

c) Considerăm date *doar* premisele. Concluzia trebuie *obținută*.

Fie inferența 1 (grila 7). Pornim de la premisa $a = b$. Pe baza ei, aplicăm *a/b*, în premisa $P(a)$. Astfel, prin substituție, *obținem* concluzia $P(b)$, fără ca aceasta să fi fost dată.

---

[45] Dumitru Gheorghiu, *Principiile Logicii în raport cu dezvoltarea logicii contemporane* – Rezumatul tezei de Doctorat – București, 1994, p. 8.

Fie inferența 3, deja folosită. Aplicăm derivarea rezolutivă[46]. Aducem premisele la forma de clauze disjunctive: *~P(a) v P(b), ~P(b) v P(c)*. Prin rezoluție, obținem clauza concluzivă: *~P(a) v P(c).* Aceasta este echivalentă cu *P(a) ⊃ P(c).* Și aici, prin derivare rezolutivă, *obținem* concluzia, fără ca ea să fi fost dată.

În ambele cazuri s-a găsit câte o cale de a *obține* concluzia, care nu este dată inițial.

Observație. Procedura de la punctul a) este aplicabilă tuturor celor trei inferențe. În timp ce, procedurile b) și c) nu sunt aplicabile inferenței 2. *Principiul identității* nu funcționează aici, cel puțin, nu în sensul arătat. Nici derivarea rezolutivă nu se poate aplica. De exemplu, doar din premisa *a = b* nu avem cum să obținem clauze rezolubile. Astfel, sunt excluse atât derivarea rezolutivă, cât și obținerea formei clauzale care să fie echivalentă cu concluzia *P(a) ⊃ P(b).*

Prin raționamentul *a = b ⊢ P(a) ⊃ P(b)*, putem înțelege că „*a este identic cu b. Prin urmare orice proprietate a lui a este și proprietate a lui b*." Dar atunci, simbolic ar putea avea forma: *a = b ⊢ ∀F(F(a) ⊃ F(b)). F* este o metavariabilă. Domeniul de valori al lui *F* ar trebui să fie o mulțime proprietăți. P ar putea fi una dintre aceste proprietăți și, implicit, o constantă. Așadar, concluzia explicită ar trebui să conțină o cuantificare universală, aplicată mulțimii de proprietăți, nu de obiecte. Astfel concluzia: *dacă a este P, atunci și b este P*, rezultă printr-o specificare a universalului. Iar afișarea ei directă poate fi înțeleasă ca rezultat al tranzitivității.

Raționamentul ar fi: *a = b ⊢ ∀F(F(a) ⊃ F(b)) ∀F(F(a) ⊃ F(b)) ⊢ P(a) ⊃ P(b)* prin urmare *3. a = b ⊢ P(a) ⊃ P(b)*. Încât raționamentul final ar putea fi înțeles ca raționament concluziv din celelalte două raționamente-premise. Oricum, această regulă se aplică la nivelul predicatelor, nu al termenilor. Și din premisa *a = b* ar rezulta, în mod direct, concluzia: orice proprietate a lui *a* este și proprietate a lui *b.* Adică, dintr-un atom ce conține doar constante individuale ar rezulta o formulă ce cuantifică universal proprietăți.

După cum am procedat suntem într-o formă mai slabă a principiului indiscernabilității identicilor, care ar trebui să fie: *∀ F(x = y ⊃ (F(x) ≡ F(y))*[47]. Acesta fiind conversul principiului identității indiscernabililor: *∀ F((F(x) ≡ F(y) ⊃ x = y)*[48].

Atunci situația problematică, cel puțin aparent, a acestui raționament, relativ la punctele b) și c), persistă, dar se reformulează: prin ce procedură, din *a = b*, rezultă că orice proprietate a lui *a* este și proprietate a lui *b.* Or, de validitatea lui 2 depinde construcția din grilele 4 și 5 și generalizările ulterioare.

---

[46] Cornel Popa, *op. cit.*, pp. 132–139.

[47] Peter Forest, „The Identity of Indiscernibles", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (Winter, 2020 Edition), Editura Edward N. Zalta, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/identity-indiscernible/>.

[48] Peter Forest, *op. cit*., <https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/identity-indiscernible/>.

BIBLIOGRAFIE

1. Dupre, Ben, *50 de idei pe care trebuie să le cunoşti, Filosofie*, trad. Doru Căstăian, Editura Litera, Bucureşti, 2017.
2. Enescu, Gheorghe, *Axiomatica Logicii Propoziţiilor*, vol. *Paradoxuri, Sofisme, Aporii, Studii logic-filosofice,* ediţie îngrijită de Iancu Lucica, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003.
3. Enescu, Gheorghe, *Logica identităţii*, în *Paradoxuri, Sofisme, Aporii*, ediţie îngrijită de Iancu Lucica, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003.
4. Enescu, Gheorghe, *Logica Simbolică,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971.
5. Enescu, Gheorghe, *Tratat de Logică,* Editura Lider, Bucureşti, 1997.
6. Flew, Anthony (coordonator), *Dicţionar de filosofie şi Logică*, traducere Drăgan Stoianovici, Editura Humanitas, Bucureşti, 2006.
7. Forest, Peter, „The Identity of Indiscernibles", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (Winter, 2020 Edition), Editura Edward N. Zalta, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/identity-indiscernible/>.
8. Gheorghiu, Dumitru, *Aspecte ale atribuirilor de atitudini propoziţionale*, în *Existenţă, Contradicţie, Adevăr*, Editura Trei, Bucureşti, 2005.
9. Gheorghiu, Dumitru, *Contribuţii în Logica Simbolică şi Dicţionarul de Logică al lui Enescu Gheorghe*, vol. *Istoria Logicii Româneşti,* coord. Alexandru Surdu, Dragoş Popescu, Editura Tehnică, Bucureşti, 2006.
10. Gheorghiu, Dumitru, *Introducere în Filosofia Minţii*, curs universitar, vol I, Editura Trei, Bucureşti, 2015.
11. Gheorghiu, Dumitru, *Intuiţionism*, *Paraconsistenţă, Contrarietate şi Subcontrarietate*, în *Existenţă, Contradicţie, Adevăr*, Editura Trei, Bucureşti, 2005.
12. Gheorghiu, Dumitru, *Principiile Logicii în raport cu dezvoltarea logicii contemporane* – Rezumatul tezei de Doctorat – Bucureşti, 1994.
13. Hodges, Wilfried*, Elementary Predicate Logic*, în *Handbook of philosophical logic*, second edition, Edited by Dov M. Gabbay and F. Guenthner, vol 1.
14. Iliescu, Gabriel, *Diagramele Euler şi Tranzitivitatea*, în *Analele Universităţii „Spirut Haret"*, seria Studii de Filosofie, Nr. 10, 2008, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 2008.
15. Lucica, Iancu, *Gheorghe Enescu – omul, logicianul, filosoful. Studiu introductiv*, în vol. *Paradoxuri, Sofisme, Aporii, Studii logico-filosofice*, ediţie îngrijită de Iancu Lucica, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003.
16. Popa, Cornel, *Logică şi metalogică*, vol. II, Editura Fundaţiei *România de Mâine*, Bucureşti, 2002.
17. Priest, Graham, *Cuvânt înainte*, în Lucica Iancu, Gheorghiu Dumitru, Chirilă Roman (coordonatori), *Ex falsum quodlibet, Studii de Logică Paraconsistentă*, Editura Tehnică, colecţia Cogito, Bucureşti, 2004.
18. Priest, Graham, *Logica, o foarte scurtă introudcere*, trad. Gabriel Tudor, Editura Litera, Bucureşti, 2020.
19. Tarski, Alfred şi Givant, Stephen, *A formalization of set theories without variabiles*, în *American Coloquium Publications*, vol. 41, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1987.