DOI: 10.59277/PL.2025.28.05

WITTGENSTEIN VS GÖDEL. ÎNTRE METAFIZICĂ, METAMATEMATICĂ ȘI NONSENS

IULIAN GRIGORIU

Universitatea „Dunărea de Jos”, Galați

WITTGENSTEIN VS GÖDEL.
BETWEEN METAPHYSICS, METAMATHEMATICS, AND NONSENSE

Abstract: The well-known interpretative conflict between Ludwig Wittgenstein and Kurt Gödel is reassessed here through the lenses of metaphysics, metamathematics, and nonsense. Beginning with Gödel's first incompleteness theorem (1931), the article examines Wittgenstein's critical remarks in *Remarks on the Foundations of Mathematics* (Appendix III, ca. 1937). Gödel demonstrated, by means of arithmetization and diagonalization, how a formal proposition can assert its own unprovability – a result which, under the standard interpretation, becomes the expression of undecidable truth. The article reconstructs, both logically and philosophically, Wittgenstein's claim that such a proposition is a construct that formally resembles mathematical propositions, yet lacks any normative function within the game of proof. The paradoxical convergence between the two thinkers regarding the limits of formal systems is brought to light: in Gödel's case through logical construction, in Wittgenstein's case through the critique of meaning and the reformulation of semantics. Against the backdrop of the complex relation between truth, proof, and provability, I argue that Gödel's theorem does not substantiate the possibility of "truth" transcending the formal framework, being rather a satisfaction within the standard model $\mathbb{N}$. At the same time, Wittgenstein's critical stance does not exclude a Platonic or metaphysical reality. In continuity with the *Tractatus* line of thought, within the philosophy of logic and mathematics, nonsense retains an elucidatory role, assuming different forms – from the objective (such as "truth") to the speculative (such as "to prove"), mathematically and metaphysically disguised. To structure and ground Wittgenstein's position vis-à-vis Gödel, I clarify the complex relation between proof and interpretation, highlight the dynamics of a (mathematical) proposition's status relative to them, and distinguish between the rule of a (meta)mathematical game and the regular use of signs within that game. The concluding question –"What can we do with natural numbers?" – reopens the discussion on the structural limits of axiomatizable theories, while also acknowledging that the shift to stronger theories may render the Gödelian proposition provable within another mathematical game (theory, inference rules, notion of proof). This supports Wittgenstein's conception that the status of a proposition is relative to rules of use, and that no absolute reference system exists in mathematics or in some generic grammatical space from which an ultimate principle of truth might emanate.

Keywords: incompleteness, truth, proof, provability, interpretation, mathematical game.

1. CONTEXT ISTORIC ȘI INTERPRETATIV

În 1931, Kurt Gödel publică articolul său, socotit revoluționar, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, în care demonstrează că în orice sistem formal recursiv, suficient de expresiv pentru a reda

aritmetica, precum *Principia Mathematica* (PM) a lui Russell și Whitehead, există propoziții care nu pot fi demonstrate în cadrul acelui sistem, deși sunt adevărate. Aceste propoziții, construite printr-un procedeu de codificare sintactică devenit celebru sub numele de „numerizare Gödel" (Gödel numbering), sunt autoreferențiale în sens larg. Ele afirmă, într-un limbaj matematic riguros, propria lor nedemonstrabilitate.

Teorema a fost percepută ca o reafirmare a unei perspective platonizante, în sensul că adevărul matematic depășește capacitatea formală a sistemelor logico-matematice, indicând o realitate matematică independentă de orice regulă de inferență sau construcție simbolică.

În contrast cu această lectură, reacția lui Ludwig Wittgenstein, exprimată în mai multe fragmente din *Remarks on the Foundations of Mathematics*[1] (RFM) și în special în Anexa III, a fost considerată de unii comentatori drept confuză sau chiar eronată. Wittgenstein pare să nu accepte nici concluziile, nici semnificația pe care teorema lui Gödel le revendică în mod uzual. Receptarea acestei reacții a variat considerabil. I s-a reproșat lui Wittgenstein că nu înţelege teorema, că demersul său nu aruncă nicio lumină asupra ei, că remarcile sale sunt de slabă calitate şi conţin erori uşor de sesizat, că e incapabil să aprecieze premisele explicite ale încadrării teoremei, confundând *adevărul* cu *demonstrabilitatea.* Wittgenstein ar neglija premisa consistenței sistemului PM și ar relativiza conceptul russellian de adevăr, respingând concluzia incompletitudinii pe motiv că propoziția gödeliană poate fi considerată adevărată sau falsă într-un sens „extern" jocului formal al lui Russell.

Începând cu anii '80–'90, o serie de exegeți, între care V.H. Klenk, Stuart Shanker, Jaakko Hintikka, Cora Diamond, Crispin Wright, Juliet Floyd, Hilary Putnam, au reevaluat poziția lui Wittgenstein, oferind interpretări complexe și mai plauzibile ale paragrafului 8 din Anexa III a RFM, supranumit „paragraful de notorietate". Juliet Floyd și Hilary Putnam (2000[2]) susțin că Wittgenstein ar fi avut o înțelegere surprinzător de pertinentă a teoremei, readucând-o într-un cadru filosofic contemporan. Toate aceste poziționări, care pleacă de la o dispută tehnică de logică și fundamentele matematicii, arată că ne aflăm în fața unor consecințe de ordin ontologic și semantic de prim rang. În opinia mea, reacția lui Wittgenstein ține de o reluare a temelor majore din *Tractatus Logico-Philosophicus*, de data aceasta prin raportare directă la fundamentele aritmeticii. A-l eticheta drept „relativist semantic" sau „constructivist strict" este reductiv, căci Wittgenstein rămâne fidel realismului structural al formelor generale tractariene, deschis către interpretări logico-ontologice și formale. În *Tractatus*, logica și valorile de adevăr ale propozițiilor nu „spun" nimic despre lume, despre felul în care ele „se arată" în timp ce funcționează ca parte a unor structuri formale. Fiecare propoziție matematică este un calcul care își găsește justificarea în propria sa regulă de formare și transformare. Nu există o „demonstrație a independenței" în sens metamatematic, fiecare calcul este o „insulă" completă, care nu poate vorbi nici despre alt calcul, nici despre sine, punct de vedere păstrat de-a lungul întregii gândiri wittgensteiniene. Rezultatele metamatematice, precum

[1] Ludwig Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, ed. G.H. von Wright, R. Rhees, trad. G.E.M. Anscombe, Cambridge, MA, MIT Press, 1983.

[2] Juliet Floyd, Hilary Putnam, „A Note on Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' about the Gödel Theorem", *Journal of Philosophy*, vol. 97, nr. 11, 2000, pp. 624–632.

construcția lui Gödel, a existenței propozițiilor adevărate, dar nedemonstrabile, apar drept nonsensuri, datorită ieșirii din cadrul prestabilit. Or, depășirea unor asemenea limite este semnalată de Wittgenstein, în cazurile lui Frege, Russell, Cantor, Dedekind, Skolem ș.a., în vederea unei reformări a fundamentelor matematicii. Și Gödel își construiește demonstrația în afara sistemului (PM), printr-o analiză asupra proprietăților formale ale demonstrațiilor, transformând sintaxa în aritmetică. În toate aceste situații, gratuitatea unor „jocuri matematice" ține mai puțin de resursele nebănuite ale limbajului, cât de manipularea lor necorespunzătoare, fapt sancționat întotdeauna de Wittgenstein.

2. OBIECTIVE ȘI O CONVERGENȚĂ PARADOXALĂ

Scopul acestui articol este de a reconstrui și reevalua poziția lui Wittgenstein în fața teoremei lui Gödel, într-un mod care să depășească caricaturizările simpliste. Propun să citim textele lui Wittgenstein ca pe o reinterpretare a teoremei de incompletitudine în alt joc matematic și filosofic, unul în care statutul de „adevăr" nu poate fi conferit doar de semnătura sintactică a unei formule autoreferențiale.

În centrul discuției se află, pe lângă adevărul unei propoziții matematice, posibilitatea formală de a o demonstra, în special, statutul filosofic al propozițiilor autoreferențiale și legitimitatea vorbirii despre „adevăruri indecidabile". În același timp, propun o lectură alternativă care vizează o convergență paradoxală, în sensul că Gödel relevă limitele PM printr-o demonstrație formală, iar Wittgenstein le denunță printr-o critică filosofică a sensului.

Menționez că aportul critic al lui Wittgenstein se va dovedi unul inovator și constructiv, prin aceea că se apropie de limbajele *independence-friendly* (Hintikka, 1993[3]). Și devine un precursor al dezvoltării logicilor paraconsistente (Priest, 2006[4]).

3. TEOREMA LUI GÖDEL, INTERPRETAREA STANDARD, PROBLEMA AUTOREFERINȚEI ȘI INCOMPLETITUDINEA *PRINCIPIEI MATHEMATICA*

Gödel a introdus o metodă de aritmetizare a limbajului formal, atribuind fiecărui simbol, propoziție și demonstrație un cod numeric unic, un număr Gödel, ceea ce permite sistemului să se „auto-reflecte", adică să formuleze propoziții despre propriile sale formule și demonstrații în limbajul aritmetic. Folosind o astfel de tehnică, Gödel construiește, în interpretare metamatematică, o propoziție *P*, care

[3] Jaakko Hintikka, „The Original Sinn of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", în *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, ed. K. Puhl, 1993, pp. 24–51. Wittgenstein pledează pentru ceea ce Hintikka descoperă în limbajele de ordinul întâi numite „independence-friendly" (IF) în care se renunță la unele restricții din semantică și sintactică, pentru a putea să vorbim despre adevărul propozițiilor din IF chiar în cadrul acestora.

[4] Graham Priest, „Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem", *Wittgenstein's lasting significance*, ed. Max Kölbel, Bernhard Weiss, London and New York, Routledge, 2004, pp. 207–227.

afirmă despre sine că nu este demonstrabilă în sistemul *PM*[5], „P: P este adevărată[6], dar nedemonstrabilă".

Această frază este frecvent folosită, dar poate duce la confuzii, mai ales în lumina criticii wittgensteiniene. Atunci când se spune „P este adevărată", e vorba de o interpretare extrinsecă, metamatematică, nu de o valoare de adevăr atribuită în interiorul sistemului. Mai trebuie subliniat că nu avem o teoremă de consistență absolută pentru PM, dar în sens pragmatic, există motive să credem că este consistent, deoarece nu s-au găsit contradicții în cadrul său. Dacă sistemul este consistent, atunci propoziția *P* este nedemonstrabilă. În interpretarea metamatematică standard, acest lucru înseamnă că *P* este adevărată, dar nedemonstrabilă. Propoziția Gödel este construită astfel încât să nu încalce principiile logice ale sistemului formal, dar să poată fi interpretată drept o afirmație despre propria ei nedemonstrabilitate. Considerând PM consistent, atunci *P* nu poate fi demonstrabilă în PM, căci dacă ar fi, atunci *P* ar fi și falsă (pentru că afirmă propria nedemonstrabilitate), ceea ce ar însemna că PM este inconsistent. Dată fiind consistența PM, Gödel arată în articolul său[7], că PM este incomplet, deoarece conține cel puțin o propoziţie nedemonstrabilă și în același timp „adevărată". Prin urmare, orice teorie matematică consistentă incluzând numere naturale este incompletă[8].

4. CONSTRUCŢIA LUI GÖDEL ÎN PRIMA TEOREMĂ DE INCOMPLETITUDINE

Pentru a obține în cadrul sistemului formal PM o propoziție indecidabilă, dar adevărată, Gödel construiește formal o autoreferință mediată prin mecanismul de diagonalizare. Mai întâi, definește noțiunea de „semn de clasă", adică o formulă bine formată din PM cu exact o variabilă liberă de tip numeric[9]. O astfel de formulă, notată generic P(x), exprimă o mulțime (sau clasă) de numere naturale.

Fie mulţimea semnelor de clasă, $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, mulţime ordonată, numărabilă, infinită, în care fiecare semn de clasă ocupă un loc bine determinat. Gödel construieşte pentru fiecare semn de clasă expresia R(n), unde R este relaţia de ordine,

[5] Este util de precizat că *Principia Mathematica* este un exemplu de sistem formal, dar teorema lui Gödel se aplică oricărui sistem recursiv, consistent și capabil să exprime o aritmetică minimă.

[6] Noțiunea de „adevăr" utilizată aici nu este formalizabilă în sistem, ci este definită într-un metalimbaj natural, ceea ce face distincția dintre adevărul semantic și demonstrația sintactică.

[7] Kurt Gödel, „On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related Systems I" (1931), în *Collected Works*, vol. I, publications 1929–1936, ed. Solomon Feferman, pp. 144–195, New York, Oxford University Press, 1986.

[8] Pentru clarificarea conceptelor folosite, un sistem de propoziții (cum e PM) este *consistent* dacă nu admite propoziții contradictorii în sânul său. Un sistem de propoziții este *complet*, dacă fiind dată orice propoziție, sau aceasta, sau negația sa sunt demonstrabile în cadrul sistemului (teoriei). Evident, incompletitudinea revine la aceea că avem o propoziție pentru care nici ea, nici negația ei nu sunt demonstrabile. A fi *demonstrabil* în sistemul S înseamnă că propoziția poate fi dedusă din propozițiile adevărate ale lui S, că există o demonstrație formală a ei.

[9] O formulă cu o singură variabilă liberă care definește o mulțime de numere naturale, echivalentul a ceea ce am numi azi „o predicație unară asupra numerelor naturale".

iar n este locul ocupat de clasă. R(n) arată locul unei expresii de clasă în mulţimea semnelor de clasă. Atât expresia funcțională P(x), cât și relația R(n) sunt definite în interiorul sistemului PM. Fiind dat α, orice semn de clasă, prin [α, n] se înţelege formula care rezultă din semnul de clasă când variabila liberă α se înlocuieşte cu numărul de ordine n (adică cu „locul" ocupat de α sau, [P(x), n] = P(n)[10].

Acum Gödel defineşte o clasă K de numere naturale în felul următor:

n∈K ≡ $\overline{Bew}$ [R(n), n] (1), unde *Bewx* înseamnă că *x* este o formulă demonstrabilă, iar bara de deasupra denotă negaţia; (Bew provine de la cuvântul german *beweisbar*, adică „demonstrabil"). Se observă că modul de definiţie este unul în care se suprapun tipuri diferite de concepte: în stânga avem un concept de definit (n∈K), în dreapta, o construcţie în PM, de forma „e nedemonstrabil că n∈K". Dacă deja prin definiția („suprapusă", metalogică) se pune semnul identic între o propoziţie şi semnificația ei (că este „nedemonstrabilă"), se creează o tensiune structurală între nivelul limbajului obiect (PM) și cel al metalimbajului (metateoria), între statutul semantic și cel sintactic al propoziției, între adevărul propoziţiei şi demonstrabilitatea ei. Aici e punctul nodal al demonstrației lui Gödel și în aceasta constă strategia constructivă a primei teoreme de incompletitudine. Toate noţiunile din *definiens* pot fi formate în sistemul PM şi atunci putem forma noţiunea K din ele. Există deci un astfel de semn de clasă *P*, astfel încât formula [P, n], interpretată conform sensului termenilor din PM, afirmă că numărul natural n aparţine clasei K. Clasa K va fi reprezentată în mulţimea semnelor de clasă prin semnul *P* care va avea ca expresie de ordine pe R(q); P=R(q); [P, q] va însemna q∈K. Se arată că formula [R(q), q] (acelaşi lucru cu [P, q]) este adevărată, dar nedemonstrabilă, adică nu se poate demonstra în K. Definiția clasei K face apel simultan la limbajul obiect (sistemul PM) și la metalimbajul în care vorbim despre demonstrațiile posibile în PM. Rezultă astfel o situație în care, în partea stângă a definiției, se află o propoziție de forma n aparține lui K, iar în partea dreaptă o expresie care, în metateorie, afirmă că n nu satisface o formulă demonstrabilă.

Demonstraţia decurge în felul antinomiei mincinosului. Fie *Bew*[R(q), q], adică, q∈K (0). În formula (1), n∈K ≡ $\overline{Bew}$[R(n), n], se substituie n cu q şi avem:

q ∈K≡ $\overline{Bew}$[R(q), q]; (2). Din (0) şi (2), prin *modus ponens*, rezultă $\overline{Bew}$[R(q), q]; contrazice ipoteza. Presupunem acum că $\overline{Bew}$[R(q), q]; adică q∉K; (3).

Conform (1), q∉K≡ $\overline{\overline{Bew}}$[R(q), q] (4). Din (3), (4), prin *modus ponens*, rezultă $\overline{\overline{Bew}}$[R(q), q], adică *Bew*[R(q), q]; din nou se contrazice ipoteza. Deci nu s-a putut demonstra nici propoziția *Bew*[R(q), q] (adică q∈K), nici negaţia $\overline{Bew}$[R(q), q] (q∉K). Deci nu putem spune nici că q∈K, nici că q∉K. Conform demonstraţiei metateoretice, „avem în faţa noastră o propoziţie care afirmă despre sine că nu este demonstrabilă în PM"[11].

---

[10] Deci o proprietate sau o funcție, o „regulă" de numere se înlocuiește cu funcția aplicată numărului de ordine pe care îl are în mulțimea generală a semnelor de clasă. Consider că această trecere nu poate fi decât o operațiune de tip numeric, unul din artificiile predilecte ale lui Gödel. De exemplu, dacă S(x) este Par(x) – semnul de clasă al numerelor pare, care ocupă un loc „i" în mulțimea semnelor de clasă, atunci [α, *i*] = [Par(x), *i*] = Par(i) (Relațiile ternare x = [y, z] sunt considerate, de asemenea, a fi definibile în PM).

[11] Kurt Gödel, *op. cit.*, pp. 150–151.

Ne-am putea întreba: „Ce alt conţinut ar fi putut avea o astfel de propoziție, având în vedere modul în care a fost definită?” Replica (şi explicaţia) e următoarea: „Contrar aparenţelor, asemenea formulă nu implică eroarea circularităţii. Mai întâi este numai afirmat că o anumită formulă bine definită (...) este nedemonstrabilă. Numai ulterior (...) se demonstrează că această formulă este cea prin care propoziţia în sine a fost exprimată.”[12]

5. OBSERVAȚIE

Demonstrația are o structură analoagă paradoxului mincinosului prin presupunerea demonstrabilității propoziției [R(q), q], adică *Bew*[R(q), q] este adevărat, care conduce, conform definiției lui K, la faptul că q aparține lui K. Dar, prin definiție, q aparține lui K dacă și numai dacă [R(q), q] nu este demonstrabilă. Rezultă o contradicție. Mai departe, presupunerea că propoziția [R(q), q] nu este demonstrabilă, adică $\overline{Bew}[\mathrm{R(q)}, \mathrm{q}]$ este adevărat, conduce, conform aceleiași definiții, la faptul că q aparține lui K. Dar asta înseamnă că [R(q), q] ar trebui să fie demonstrabilă, ceea ce contrazice iarăși ipoteza.

Deci [R(q), q] nu este demonstrabilă în PM, iar dacă sistemul este și ω-consistent, atunci nici negația ei nu este demonstrabilă. În acest fel, propoziția Gödel afirmă despre sine că nu este demonstrabilă, iar metateoretic se arată că exact aceasta este situația. Gödel formulează acest rezultat cu precauție, evitând circularitatea, deoarece mai întâi se construiește o propoziție bine definită, despre care se afirmă că este nedemonstrabilă și abia ulterior se arată că această propoziție este identică cu formula care exprimă enunțul referitor la propria ei nedemonstrabilitate.

6. CUM ÎȘI AFIRMĂ O PROPOZIȚIE PROPRIA NEDEMONSTRABILITATE

Formal, acest lucru se realizează printr-o autoreferință aritmetizată, obținută printr-un procedeu de diagonalizare și substituție, adică propoziția reușește să „vorbească despre sine” printr-o funcție de codificare. În primul rând, se construiește o formulă care exprimă faptul că nu există un număr natural, „n”, care codifică o demonstrație a sa în sistem. În al doilea rând, se folosește predicatul Bew(n) = „n este codul unei demonstrații valide în PM”. În acest mod, propoziția Gödel poate fi scrisă formal ca P ≡ ¬Bew(#(P)) unde #(P) este numărul Gödel al propoziției. Cu alte cuvinte, *P* afirmă că nu există o demonstrație a lui *P* în PM. Raționamentul este că dacă propoziția Gödel ar fi demonstrabilă, atunci ar exista o demonstrație a afirmației „P nu este demonstrabilă”, ceea ce ar conduce la contradicție. Deci propoziția Gödel nu poate fi demonstrabilă, dar este adevărată, sub presupunerea că sistemul este consistent.

[12] *Ibidem*, p. 151, n. ed.15.

Gödel nu dă un exemplu explicit de propoziție în limbaj de tip PM cu simboluri formale, pentru că ar fi foarte complicat, dar propoziția gödeliană este un enunț de forma „Nu există o demonstrație (în PM) pentru propoziția al cărei cod este n”. De exemplu, un enunț ca „Numărul n nu este numărul Gödel al unei demonstrații a propoziției care are codul n” este un prototip intuitiv pentru ceea ce Gödel reușește să formalizeze complet.

Apare legitimă întrebarea: „ce cod există?”, „Care e numărul Gödel al unei propoziții care își afirmă nedemonstrabilitatea?”. Este adevărat că formulei *P* i se asociază un număr Gödel, adică un simbol generic, #(P), dar codificarea este pur mecanică. Problema nu constă în existența codului, ci în imposibilitatea de a construi un cod numeric pentru o demonstrație a lui *P*. Simbolul #(P) există, cel puțin ca proiect posibil într-un manierism matematic, dar codul unei demonstrații pentru #(P) nu există, dacă sistemul e consistent. Chiar dacă este nedemonstrabilă în sistem propoziția *P* ar fi „adevărată” într-un sens semantic, adică ar corespunde unei realități aritmetice. Pentru Gödel și adepții săi, aceasta înseamnă că adevărul matematic este „mai larg” decât formalismul și, prin urmare, există o realitate matematică „în sine”.

7. TENSIUNEA DINTRE „DEMONSTRAȚIE”, „DEMONSTRABILITATE” ȘI „ADEVĂR”

Propoziția construită de Gödel are forma $P \equiv \neg Bew(\#P)$, unde Bew(x) desemnează predicatul care exprimă că x este numărul Gödel al unei formule demonstrabile în PM. Dar în textul original, predicatul Bew(x) înseamnă „x este numărul Gödel al unei demonstrații valide în PM”, nu al unei formule demonstrabile și cu atât mai puțin al unei propoziții adevărate. Diferența este subtilă, dar decisivă. Demonstrația constă într-un șir finit de formule construit conform regulilor sistemului, în timp ce demonstrabilitatea este proprietatea unei formule de a apărea ca ultim pas al unei asemenea demonstrații. Formal, această relație se precizează prin predicatul Proof(x, y), identic prin definiție cu „x este codul unei demonstrații pentru formula y”. Din acesta se derivează definiția $Bew(y) \Leftrightarrow \exists x\, Proof(x,y)$. În acest mod, Bew(y) afirmă că există cel puțin un cod care reprezintă o demonstrație validă pentru formula y. Pe baza acestor straturi ale construcției și folosind metoda diagonalizării, formula *P* ajunge să afirme despre propriul ei cod, #P, că nu există nicio demonstrație pentru el, adică $P:\neg Bew(\#P)$, expresie cu statut autoreferențial. În limbaj natural, se parafrazează prin: „Această propoziție nu este demonstrabilă”. Se suprapun aici trei domenii:

- Al demonstrației, fundamental și pur sintactic, alcătuit din șiruri finite de simboluri manipulate prin reguli stricte.
- Domeniul demonstrabilității, metasintactic, derivat din primul, cu sensul că o propoziție este demonstrabilă dacă există o demonstrație pentru ea, deci posedă o proprietate exprimată în termeni existențiali peste demonstrații.
- Domeniul adevărului semantic, metateoretic, se deschide atunci când ne punem problema dacă „o propoziție este adevărată, dar nu demonstrabilă”.

În acest cadru, „demonstrația” constituie elementul primar și stabil, strict formalizată și verificabilă. „Demonstrabilitatea” ocupă un nivel secund, mai abstract, depinzând de cuantificarea peste demonstrații. Deși formalizabilă în aritmetica gödeliană, implică un pas suplimentar de cuantificare, fiindcă spunem „există o demonstrație”, deci „demonstrabilitatea” se află deja la intersecția dintre construcția formală și metadiscurs. „Adevărul semantic” apare ca un domeniu suplimentar și fragil, pentru că presupune depășirea cadrului formal și apelul la o instanță metateoretică, modelul standard al aritmeticii, prin raportare la care nu mai are aceeași stabilitate[13].

Diferențierea acestor domenii creează spațiul interpretativ în care Wittgenstein contestă că *P*, chiar dacă seamănă formal cu o propoziție matematică, are funcție normativă în jocul matematic[14], în timp ce interpretarea standard vede în *P* expresia unui „adevăr indecidabil”.

8. O PROPOZIȚIE FĂRĂ ACOPERIRE ONTICĂ. NONSENSUL PROPOZIȚIEI GÖDEL

Ceea ce adepților lui Gödel le apare ca amprentă a unui absolut, pentru Wittgenstein reprezintă o pseudoexistență. O propoziție este reală și adevărată, în măsura în care respectă regulile unui joc de limbaj ce permit afirmarea sa. Dar propoziția *P* a lui Gödel, din punct de vedere sintactic, apare ca fiind independentă de PM, în sensul wittgensteinian al termenului, deoarece nu poate apărea la finalul unei demonstrații în simbolistica respectivă. Și dacă *P* rămâne sintactic independentă în toate jocurile de limbaj ale matematicii, atunci ea nu este, propriu-zis, o propoziție matematică. Nu există, pentru Wittgenstein, nicio constrângere, fie intra-sistemică, fie extra-matematică, prin care *P* să fie obligatoriu încadrată în PM, de pildă, prin adoptarea unei concepții non-sintactice a adevărului matematic, precum cea a lui Tarski.

Fără a fi un anti-realist, Wittgenstein respinge lectura platonizantă a teoriei lui Gödel, faptul că aceasta ar conduce la o realitate matematică externă. În cazul său, o propoziție este adevărată în măsura în care joacă un rol într-un sistem de reguli, adică în cadrul unui „spațiu gramatical” (ansamblul regulilor ce determină formarea și utilizarea propozițiilor într-un joc de limbaj). În loc să întrebe dacă o propoziție „corespunde realității”, Wittgenstein întreabă „În ce joc de limbaj este utilizată această propoziție?”, „Care sunt regulile care determină validitatea ei?”, „Cum se poate ea reprezentaționa?”. Jocurile de limbaj stabilesc semnificația propozițiilor în toate lumile posibile ale sensului din spațiul gramatical. Din această perspectivă, propozițiile matematicii sunt expresii și instrumente de operare cu semne într-un sistem simbolic. Adevărul lor este dat de regula de utilizare, în timp ce pentru platonizanți, propozițiile matematicii descriu obiecte abstracte, iar adevărul lor decurge din corespondența cu un fapt transcendent. Wittgenstein, fără să respingă,

[13] S-ar putea obiecta că Gödel nu are nevoie să invoce „adevărul”, dat fiind tocmai recursul la modelul standard al aritmeticii, în care adevărul este o satisfacere în $\mathbb{N}$.

[14] Nu joacă un rol normativ, adică nu poate fi folosită pentru a deduce altceva, nu intră în jocul demonstrațiilor.

ci dimpotrivă, sesizând astfel de limitări de ordin metafizic, îi critică pe aceia care se grăbesc să le depășească cu prea mare ușurință. Fiecare pas formal introduce în joc un nou strat interpretativ când fiecărui simbol i se asociază un număr natural, iar prin combinare se obțin coduri numerice pentru formule și pentru demonstrații. O demonstrație devine, la rândul ei, un obiect numeric, ceea ce o deplasează într-un spațiu conceptual „deformant". Practic, te deplasezi într-o altă realitate, după Gödel, într-una obiectivă, în care adevărul ar transcende demonstrabilitatea, după Wittgenstein, într-o pseudorealitate.

În continuare, faptul reducerii la absurd alterează și mai mult pretenția de acces la obiectivitate al demonstrației. Dacă *P* ar fi demonstrabilă, sistemul ar deveni inconsistent. Deci, nedemonstrabilitatea lui *P* va fi consecința consistenței sistemului, nu a unui adevăr superior. De aceea, statutul lui *P* este dependent și relativ la sistemul formal în care este construit.

Nu trebuie neglijat nici aspectul modal în care Gödel pune problema. Pentru că Gödel cercetează de fapt că propoziția *P* poate fi adevărată și nedemonstrabilă, dacă ea ar exista[15]. Numai că acest tip de existență este unul într-un sistem de semne și altul în alt sistem de semne[16].

Un alt aspect e că nedemonstrabilitatea nu ține de simpla autoreferință. Nu orice enunț care vorbește despre sine e problematic, de pildă, „această propoziție este demonstrabilă" nu produce aceeași situație. Particularitatea construcției gödeliene este că propoziția se referă la absența unei demonstrații proprii. Codul numeric al lui *P* există, dar nu există un cod numeric al unei demonstrații valide a lui *P*. Avem de-a face cu o jonglerie formală care transformă paradoxul mincinosului într-un artificiu numeric? În orice caz, totul se reduce la o subtilitate, și anume, la faptul că nu apare „n" concret în demonstrație, ci afirmația generală că „niciun n nu satisface condiția de a fi codul unei demonstrații".

E ușor de făcut aici conexiunea cu argumentul ontologic al lui Anselm în varianta modală: dacă putem construi mental x, atunci x există fiindcă altfel se încalcă o anumită condiție, chiar a posibilității construcției lui x. În cazul propoziției Gödel, se vorbește despre numărul „n", ca o posibilitate reală, dar el efectiv nu apare în demonstrație. Nu există un număr „n" concret pe care Gödel îl scrie în demonstrație, totul se construiește generic, „dacă ar exista un n astfel încât…", atunci propoziția lui Gödel afirmă că „un asemenea n nu există". Așadar, dacă nu vedem un „n" explicit în text, se arată că niciun candidat „n" nu poate juca rolul cerut. Avem de-a face cu o afirmație existențială negativă, nu cu o demonstrație prin exemplu. Rezultatul lui Gödel poate fi privit ca un artificiu numeric, ingenios, dar speculativ, derivat din paradoxul mincinosului și ridicat la rang de teoremă metamatematică.

---

[15] Atenție la nuanța modală: „poate fi, dacă *P* ar fi", dar, de fapt, *P* nu este demonstrabilă!

[16] Dacă ne deplasăm într-o teorie mai puternică (să-i spunem *X*), atunci acolo *P* poate fi demonstrabilă, de exemplu, în metateoria aritmeticii de ordin superior. Dar atunci *P* nu rămâne propoziție a lui PM, ci devine propoziție a lui *X*. Așadar statutul de demonstrabilitate a lui *P* depinde de sistemul formal la care o raportăm.

9. ÎNTRE PLATONISMUL METAMATEMATIC AL LUI GÖDEL ȘI REALISMUL PRAGMATIC AL LUI WITTGENSTEIN

Deși demonstrația lui Gödel construiește în mod explicit o singură propoziție autoreferențială, rezultatul său devine unul structural. Odată arătat că în *Principia Mathematica* (sau în orice sistem formal echivalent) există o propoziție indecidabilă, metoda de diagonalizare garantează existența unei mulțimi infinite de astfel de propoziții. Propoziția Gödel funcționează ca exemplu paradigmatic, iar generalizarea infinitului de propoziții indecidabile e o extensie formală a artificiului inițial. Când literatura vorbește despre „propoziții indecidabile" la plural, ea extrapolează metoda lui Gödel. Din moment ce există un artificiu care produce o astfel de formulă, atunci se poate construi o infinitate de instanțe similare prin variații ale diagonalizării, cum ar fi „Această propoziție nu este demonstrabilă în PM în cel mult n pași"; „Această propoziție nu este demonstrabilă dacă sistemul este consistent" ș.a.m.d. În spirit wittgensteinian, toate aceste variații sunt iterații ale aceleiași scheme autoreferențiale și apar ca replici ale aceluiași nonsens structural, și, prin construcție, nu joacă niciun rol real în matematică.

10. COMPLEXITATEA ȘI CRITICA SEMANTICII LA WITTGENSTEIN

În *Remarks on the Foundations of Mathematics* (RFM), Anexa III, Wittgenstein își pregătește terenul pentru analiza teoremei de incompletitudine printr-o critică implicită a teoriei semnificației dezvoltată de Frege, continuată de Russell și, întrucâtva, consolidată de Gödel. În primele patru paragrafe ale Anexei III, se conturează o critică a abuzului de forme logice aflate în afara contextelor lor semnificative. Valoarea de adevăr a unei propoziții e legată de forma ei logică, în măsura în care aceasta este încorporată în practica lingvistică. Limbajul este, prin natura sa, descriptiv, o propoziție este ceea ce facem cu ea și, de multe ori, nu ceea ce pare că spune, fie că este o întrebare, o comandă sau o propoziție matematică. Aceasta anticipează critica la adresa înțelegerii teoremei lui Gödel ca pe o propoziție care „spune despre sine că nu este demonstrabilă", caz în care forma nu dictează automat statutul semantic sau epistemic.

Wittgenstein dă mai multe exemple ca să arate în ce constau diversele jocuri de limbaj și complexitatea semanticii, unele dintre ele conducând la nonsens, precum propoziția Gödel. Jocul de limbaj constituie limita aplicabilităţii semanticii, a relaţiei limbaj-cuvânt, ceea ce va trasa graniţele între care are sens să vorbim despre ce *spune* o propoziţie şi ce *este* acea propoziţie. Fiindcă Wittgenstein pune semnul egal între acestea, susținând că o propoziţie „spune ceea ce spune" şi aceasta este propoziția (RFM, Anexa III, §6), nu că „poate spune ceva despre ceea ce spune chiar ea însăşi".

Pentru evitarea paradoxurilor și a nonsensurilor, Wittgenstein are în vedere faptul că forma lingvistică nu determină automat funcția semantică. A spune „Vreau să știu dacă plouă" este o solicitare și nu afirmă nimic despre starea vremii. Gramatical, nu participă la jocul adevărului.

În cazul propozițiilor enunțiative, cele care, în mod tradițional, sunt considerate purtătoare de valoare de adevăr, Wittgenstein spune că nu adăugăm o operație numită „asertare" unei propoziții pentru a o transforma într-o afirmație. Mai degrabă, afirmarea este o componentă structurală a jocului de limbaj în care se utilizează propoziția. Situația e comparabilă cu regulile din șah, unde câștigul și pierderea fac parte integrantă din joc. A crea un joc similar șahului fără câștig sau pierdere este posibil, dar va fi un joc diferit. Prin analogie, propozițiile care nu participă la evaluarea adevărului nu sunt propoziții în sensul logicii clasice, chiar dacă seamănă formal cu ele.

În *Philosophical Investigation*[17] (PI) (22, 23), Wittgenstein critică „dublarea" propoziţiei ca atare cu semnul de asertare al lui Frege, asimilabil cu un semn de punctuaţie. Acesta ar putea să facă parte din propoziţii, greşit ar fi să „credem că afirmaţia constă din două acte, cel al evaluării şi cel al afirmării (atribuirea valorii de adevăr...)" (PI, 22).

Al patrulea paragraf din Anexa III a RFM mută discuția către aritmetică[18], întrebând dacă este posibil să facem calcule fără a avea în minte ideea că scriem propoziții aritmetice. Răspunsul este subînțeles, Wittgenstein observă că reacționăm la o înmulțire greșită așa cum reacționăm la o afirmație falsă („plouă", când de fapt nu plouă), dar această asemănare este doar superficială. Spunem „2 ori 2 este 4", iar verbul „este" pare să transforme propoziția într-una logică. Asocierea aritmeticii cu enunțuri adevărate sau false ține de convenție, fără să provină automat dintr-o necesitate structurală. Aritmetica, în fond, este un sistem de reguli de transformare care asimilează enunțurile descriptive.

11. TEOREMA LUI GÖDEL CA O CONFUZIE ÎNTRE METANIVELURI

„Există oare propoziții adevărate în sistemul lui Russell care nu pot fi demonstrate în acel sistem?" (RFM, Anexa III, §5). În stilul caracteristic, Wittgenstein mută rapid accentul de pe conținutul întrebării pe formă și pune întrebarea: „Ce se înțelege, atunci, printr-o propoziție «adevărată» în sistemul lui Russell?" Răspunsul e: „'P este adevărat' = P" (§6). A spune că o propoziție este adevărată înseamnă pur și simplu a o afirma, adică a o folosi efectiv într-un context normativ de validare. Ceea ce contează pentru ca o propoziție să fie „adevărată" într-un sistem ca PM este ca ea să fie efectiv afirmată, iar în PM, o propoziție este afirmată dacă este fie demonstrată, fie acceptată ca axiomă.

[17] Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Investigations*, trad. G.E.M. Anscombe, P.M.S. Hacker, Joachim Schulte, ed. IV, Oxford, Wiley-Blackwell, 2009.

[18] Aritmetica este domeniul matematicii care se ocupă cu numerele naturale și operațiile asupra lor, fiind formulată riguros în sisteme logice precum *Principia Mathematica* a lui Russell și Whitehead sau aritmetica axiomatizată a lui Peano (PA). În PM, aritmetica este derivată din logica simbolică și teoria tipurilor, cu scopul de a elimina paradoxurile; în PA, aritmetica numerelor naturale este definită printr-un set de axiome simple, dar suficient de puternice pentru a formaliza majoritatea rezultatelor aritmetice. Ambele sisteme tratează propozițiile aritmetice ca enunțuri interne unui sistem de reguli, obținute prin aplicarea unui set precis de axiome și inferențe și care nu aparțin semantic acelui sistem, dacă nu pot fi demonstrate în interiorul lui.

Wittgenstein subliniază această legătură între adevăr și demonstrație atunci când distinge între „afirmarea” și simpla „rostire” a unei propoziții. A afirma înseamnă a acorda statut logic unei propoziții funcționale în jocul de limbaj respectiv, în vreme ce o simplă rostire poate fi lipsită de funcție, asemeni unui exercițiu vocal. În acest context, propozițiile simbolice russelliene nu pot fi considerate afirmate decât dacă sunt rezultatul unei demonstrații sau sunt asumate ca legi fundamentale ale sistemului.

În §7, Wittgenstein revine la întrebarea lui Gödel, dacă nu cumva există propoziții formulate în simbolistica lui Russell care nu sunt demonstrabile în PM, dar care sunt totuși „adevărate”. Răspunsul este afirmativ, dar include o recalibrare conceptuală. Aceste propoziții pot fi considerate „adevărate” doar într-un alt sistem, într-un alt joc matematic. O propoziție poate fi scrisă în simbolistica lui Russell, dar acest fapt nu o integrează în sistemul PM decât dacă este demonstrabilă acolo. Prin urmare, statutul de adevăr este întotdeauna dependent de cadrul normativ și regulativ în care propoziția este formulată și utilizată. Wittgenstein deplasează centrul de greutate al problemei de la o abordare metateoretică, în care „adevărul” se vrea o proprietate obiectivă a propoziției, către o perspectivă pragmatică și contextuală. În consecință, existența unei propoziții „adevărate dar nedemonstrabile” devine, în viziunea sa, o problemă de clasificare greșită. O astfel de propoziție dacă nu este „adevărată” în PM, poate fi, eventual, într-un alt sistem care permite o altă utilizare sau alte reguli. Întreaga problematică gödeliană este considerată ca o confuzie între metaniveluri, adică între sistem și metalimbaj, între simbol și utilizare.

12. TENSIUNEA DINTRE INTERPRETARE ȘI DEMONSTRAȚIE

Wittgenstein critică forma de raționament de la baza teoremei lui Gödel, printr-o analiză a interpretării și a criteriilor de sens. În §8, imaginează un dialog ipotetic în care cineva susține că a construit o propoziție, notată *P*, care spune despre sine că nu este demonstrabilă în sistemul lui Russell. Intuiția interlocutorului este una familiară în comentariile post-gödeliene. Ce înseamnă „adevărat” în acest context? Ce înseamnă „fals” într-un sistem formal? Dacă *P* ar fi falsă, ar însemna că este demonstrabilă. Dar cum poate fi demonstrabilă o propoziție care afirmă că nu este demonstrabilă? Contradicție! Așadar, *P* nu poate fi decât adevărată și totodată nedemonstrabilă. Wittgenstein admite tacit validitatea acestei deducții, dar mută întrebarea de la nivelul conținutului propoziției la criteriile care stabilesc ce înseamnă „adevăr” și „demonstrabilitate” într-un sistem formal. Așa că filosoful întreabă „adevărată în ce sistem?” Răspunsul este: „adevăr în sistemul lui Russell” înseamnă „a fi demonstrată în sistemul lui Russell”; iar „falsă” înseamnă că i s-a demonstrat contrară. Tot ceea ce depășește aceste criterii nu mai aparține jocului matematic în cauză. În plus, dacă cineva presupune că o propoziție este falsă într-un alt sens decât cel intern sistemului, atunci aceasta nu contrazice faptul că ea poate fi totuși demonstrată formal. Deci posibilitatea unei propoziții „adevărate dar nedemonstrabile” e suspectă, deoarece amestecă registre semantice diferite, fără justificare, cum ar fi să afirmăm că cineva pierde la șah, dar câștigă în același timp într-un alt joc prin aceleași mișcări. Această analogie arată cum sensul unei propoziții depinde structural de regulile jocului în care este utilizată.

O altă confuzie este punctată în §9, și anume, ce înseamnă să spunem că propoziția „P” și propoziția „P este nedemonstrabilă” sunt același lucru? Aceasta ține de o identificare de expresie într-un anumit sistem de notație. Wittgenstein atrage atenția că traducerea unei formule într-un limbaj natural, precum „P nu este demonstrabilă”, adaugă un strat interpretativ care nu este conținut în simbolistica propriu-zisă. Prin urmare, identitatea dintre formă și interpretare este construită și convențională și nu se bazează pe un fapt evident.

Gödel, pentru a reda propoziția de tipul „P nu este demonstrabilă” într-un cadru aritmetic, definește predicate și funcții care corespund noțiunilor de formulă, demonstrație și regulă de inferență din PM. Prin aritmetizarea lor, „a fi o demonstrație validă” devine o relație verificabilă între numere naturale. În această manieră, ceea ce în limbaj natural sună ca „Această propoziție nu este demonstrabilă” devine, în limbaj aritmetic, o formulă internă a sistemului, care „își recunoaște” propriul cod.

Pentru Wittgenstein, transformarea unei propoziții într-o expresie formală nu este un transfer neutru de sens. Atunci când spunem în limbaj natural „Propoziția P afirmă despre sine că nu este demonstrabilă”, deja facem un pas interpretativ. Din punct de vedere formal, expresia gödeliană este o combinație de semne și numai în metalimbaj îi atribuim sensul „nedemonstrabilă”. Pentru Wittgenstein, semnificația este un efect convențional al regulilor de joc de limbaj. Dacă spunem că formula lui Gödel „înseamnă” nedemonstrabilitate, este pentru că am adoptat convenția de a interpreta predicatul Bew(y) ca „y este demonstrabil” și de a aplica metoda de diagonalizare ca un procedeu de autoreferință.

O obiecție și mai directă aduce Wittgenstein în continuare. Chiar dacă s-ar dovedi că propoziția *P* este demonstrabilă și deci ar apărea o contradicție între conținutul propoziției (că nu este demonstrabilă) și statutul ei efectiv (că este demonstrabilă), atunci nu înseamnă neapărat că ceva este greșit în sistem. Poate că interpretarea „P este nedemonstrabilă” trebuie pur și simplu abandonată, iar demonstrația trebuie acceptată ca atare. Ceea ce urmează este că dacă reușim să demonstrăm că *P* este nedemonstrabilă, atunci, implicit, am demonstrat *P*. Dar dacă această demonstrație se realizează în cadrul sistemului lui Russell, atunci rezultatul este că am demonstrat că propoziția „aparține și nu aparține sistemului”, ceea ce este o contradicție. Wittgenstein notează însă că apariția unei contradicții în sine nu este un argument absolut „devastator”. Filosoful se întreabă dacă această contradicție „face vreun rău” (RFM, Anexa 3, §11), adică dacă afectează în mod real funcționarea sistemului, ceea ce lasă deschisă acceptarea unui astfel de inconvenient ca pe o servitute a PM, dar și motiv de reevaluare a integrității propozițiilor din sistem.

13. TENSIUNEA DINTRE DEMONSTRAȚIE ȘI INTERPRETARE

Interpretarea provine din demonstrație, demonstrația din interpretare sau sunt independente?

Consider că aici e punctul de acumulare al reflecției wittgensteiniene din §8–11, și anume: care este relația dintre demonstrație și interpretare într-un sistem formal, mai ales atunci când discutăm despre propoziții autoreferențiale de tipul celei din

teorema lui Gödel? Pentru Wittgenstein, nici demonstrația nu derivă simplu din interpretare, nici interpretarea din demonstrație, iar independența lor ține de o înțelegere greșită a modului în care funcționează limbajul formal.

În §8, Wittgenstein critică faptul că o propoziție precum „P nu este demonstrabilă" poate fi pur și simplu interpretată ca atare în cadrul sistemului lui Russell. Dacă nu avem demonstrație pentru *P*, atunci propoziția „P este nedemonstrabilă" nu are încă un sens determinat. Sensul / interpretarea sunt susținute de o practică, în legătură cu o traducere semantică. Wittgenstein notează că, în PM, o propoziție este „adevărată" doar dacă este demonstrată sau este axiomă. Acest lucru implică faptul că demonstrația este criteriul de adevăr în acel sistem, deci parte din sistem, iar interpretarea, o traducere posibilă a rezultatelor ei. Când cineva spune „P este adevărată și nedemonstrabilă", face o afirmație care nu aparține limbajului sistemului. Prin urmare, demonstrația și interpretarea aparțin unor niveluri diferite, confuzia dintre ele fiind sursa paradoxului.

Wittgenstein întreabă „ce faci dacă totuși demonstrezi P?" Atunci trebuie să abandonezi interpretarea „P este nedemonstrabilă". Aici intervine tensiunea, când demonstrația contrazice interpretarea, care oferă o grilă asupra formulei, dar dacă această grilă intră în conflict cu demonstrația efectivă din sistem, interpretarea trebuie revizuită. Deci și pentru Wittgenstein, demonstrația are prioritate față de interpretare, pentru că ea face parte din regulile jocului matematic. Nu putem spune nici că demonstrația este produsă de interpretare, nici că interpretarea ar fi o consecință a demonstrației. Relația lor este una circulară, dar ierarhizată. Demonstrația ancorează utilizarea propozițiilor, în timp ce interpretarea devine o metareflecție asupra a ceea ce se întâmplă în sistem, însă ea trebuie să rămână consecventă cu regulile acelui sistem.

O interpretare care afirmă „P este nedemonstrabilă", în timp ce *P* este demonstrată, este o interpretare greșită, pentru că propoziția nu mai are nicio funcție în jocul de limbaj în care a fost generată. Interpretarea fără demonstrație poate fi speculativă, lipsită de utilitate, pe când demonstrația în lipsa interpretării funcționează ca act formal în sistem, dar poate fi opacă fără o metaexplicație.

14. DISTINCȚIE ÎNTRE REGULA DE JOC ȘI UTILIZAREA REGULATĂ A SEMNELOR ÎN ACEL JOC

S-ar putea obiecta: de ce acordă Wittgenstein prioritate demonstrației în fața propriei reguli de joc de limbaj care echivalează „P este adevărat" cu „P"? De ce pare că în unele locuri validează regula jocului, iar în altele o suspendă în favoarea demonstrației sau chiar declară propoziția lui Gödel ca nonsens? Consider că răspunsul necesită o distincție între regula de joc și utilizarea regulată a semnelor în acel joc.

În primul rând, dacă regula jocului este dată de „P este adevărată" = *P*, atunci nu există „adevăr" dincolo de utilizarea propoziției. Dacă într-un sistem formal *P* este demonstrată, atunci este adevărată. Dacă nu este demonstrată, nu este încă adevărată, iar propoziția „P este adevărată" nu are un sens propriu, ci, pur și simplu, o formă. Aceasta este regula de bază a jocului de limbaj. Însă această regulă, tocmai

pentru că e o regulă, nu funcționează în vid. Ea trebuie aplicată la ceva care e recunoscut ca făcând parte din joc. Iar aici intervine demonstrația, drept criteriu de apartenență la joc. Nu că demonstrația are prioritate sau ar contrazice regula, dar propoziția nu devine parte a limbajului matematic în mod activ (nu participă la joc) până nu este demonstrată.

Aici apare o problemă de funcționalitate. O propoziție nedemonstrată nu poate fi utilizată, nu are o valoare practică, nu produce inferențe, nu joacă niciun rol în jocul matematic. De aceea, în lipsa demonstrației, propoziția autoreferențială a lui Gödel este pentru Wittgenstein un pseudoenunț, o propoziție lipsită de criterii clare de utilizare, deci un nonsens în limbajul matematic.

15. DIAGNOSTICUL DE NONSENS ȘI SUSPENDAREA INTERPRETĂRII

În §8–11 din Anexa III, Wittgenstein critică îndrituirea faptului că propoziția lui Gödel ar spune despre sine că nu este demonstrabilă. Nedemonstrabilitatea este o interpretare, o proiecție externă, o traducere făcută într-un metalimbaj, care nu mai respectă regulile de constituire. Dacă *P* este demonstrată, atunci *sensul* interpretării că „P este nedemonstrabilă" devine contradictoriu și trebuie abandonat. Dacă *P* nu este demonstrată, atunci propoziția „P este nedemonstrabilă" nu are criterii clare de validitate și, în consecință, nu are sens. Propoziția lui Gödel poate fi gramatical corectă, dar nu poate fi utilizată regulat în nicio circumstanță clar definită. Departe de a fi o revelație ontologică, e un caz de confuzie lingvistică. Fără demonstrație sau fără o utilizare regulată, propoziția nu are un loc în sistem, și, de aceea, nici sens. De aici se conturează statutul de nonsens, nu atât dăunător, cât inutil, al propoziției Gödel.

16. DESPRE PUTEREA NORMATIVĂ A DEMONSTRAȚIEI ÎN CADRUL JOCULUI MATEMATIC

O reflecție asupra dinamicii sensului în funcție de context poate începe cu interogații de tipul „Ce constituie un criteriu pentru nedemonstrabilitate?", „Cum se modifică sensul unei propoziții după ce este demonstrată?"

În §15–17 din Anexa III, Wittgenstein se ocupă de faptul că sensul unei propoziții precum P este nedemonstrabilă" depinde de modul în care propoziția este folosită și integrată într-un sistem de reguli, care nu este fix și absolut.

În §15, Wittgenstein afirmă explicit că o propoziție nu poate fi corect denumită „nedemonstrabilă" decât în funcție de demonstrația prin care a fost obținut acest statut. „Nedemonstrabilitatea" nu este un atribut intrinsec al propoziției, cât, în mod normal, rezultatul unei practici demonstrative. Doar demonstrația arată care sunt regulile după care judecăm ce este sau nu demonstrabil. Deci, întrebarea despre propoziția „P este nedemonstrabilă" va fi, în fond, o întrebare despre puterea demonstrației în cadrul jocului matematic.

Mai departe, în §16, se susține că sensul propoziției „P este nedemonstrabilă” se schimbă în funcție de statutul ei actual. Dacă a fost demonstrată, atunci capătă statutul de concluzie finală în demonstrația nedemonstrabilității; dacă nu, criteriile adevărului ei rămân neclare, iar sensul ei este, cum spune Wittgenstein, „vălurit”. În acest punct, filosoful atacă direct presupunerea platonizantă conform căreia propozițiile matematice posedă valori de adevăr obiective, preexistente demonstrației. Pentru Wittgenstein, sensul unei propoziții nu este niciodată anterior practicii în care ea este utilizată.

Paragraful 17, deosebit de dens și tensionat, pune în scenă efectele instabilității interpretative din jurul propozițiilor autoreferențiale. Wittgenstein imaginează mai multe scenarii contradictorii. Dacă *P* este demonstrată printr-o demonstrație a nedemonstrabilității, atunci trebuie văzut în ce măsură demonstrația arată doar că anumite forme de demonstrație nu funcționează, și nu că toate ar fi excluse. Dacă însă *P* este demonstrată direct, se produce o coliziune între această demonstrație și interpretarea inițială a propoziției ca fiind nedemonstrabilă.

Într-un alt scenariu, se presupune că se demonstrează ¬*P*, ceea ce implică, paradoxal, că *P* este demonstrabilă. Această oscilație între *P* și ¬*P* ilustrează, pe lângă ambiguitatea limbajului matematic, atunci când este forțat în zone autoreferențiale, relativitatea afirmației față de contextul formal în care ea apare. Wittgenstein refuză ideea că propoziția *P* ar avea un statut clar și stabil în afara sistemului în care este utilizată. Dacă *P* este derivată la sfârșitul unei demonstrații russelliene, atunci este o propoziție a sistemului lui Russell. Dar interpretarea sa, că ar exprima nedemonstrabilitatea, trebuie abandonată odată ce demonstrația există. În caz contrar, ar însemna că o propoziție afirmă despre sine că nu poate fi demonstrată, dar totuși este demonstrată, o contradicție care, în logica tradițională, ar fi fatală, dar care, pentru Wittgenstein, nu face neapărat „rău”, ci indică o confuzie conceptuală, nelocalizată în altă parte, decât în cadrul sistemului formal respectiv.

Cu acest prilej, Wittgenstein pune bazele unei reformulări a noțiunilor de „propoziție matematică”, „adevăr” și „demonstrație”. Propozițiile autoreferențiale precum cele gödeliene sunt nu atât false, cât lipsite de ancoraj funcțional, iar acest diagnostic vizează exact tipul de anxietate logică pe care Gödel o stârnise în filosofia matematicii. Logica formală constituie una dintre convențiile posibile dintr-un model universal al sensului. Faptul că propozițiile gödeliene ar fi fie „false și deci demonstrabile”, fie „adevărate și nedemonstrabile” este văzut de Wittgenstein ca o simplificare abuzivă, produsă de confuzia dintre regulile limbajului natural și cele ale unui formalism constituit de practica regulativă a unui sistem de semne.

De aceea, în §19, Wittgenstein atacă direct tentația filosofică de a extrage afirmații speculative dintr-un sistem formal și de a le trata ca afirmații relevante despre realitate. Când cineva spune „deci P este adevărată și nedemonstrabilă”, Wittgenstein întreabă retoric „și la ce folosește această afirmație?” E ca și cum „ai proiecta un chalet baroc pe vârful Everestului, unde nimeni nu locuiește”. Afirmația e coerentă în formă, dar inutilă, deconectată de la orice aplicabilitate sau funcție în limbajul vieții. Wittgenstein respinge faptul că pura consistență internă a unei propoziții este suficientă pentru a-i garanta valoarea epistemică.

În §20, critica se adâncește și devine o reflecție generală asupra propozițiilor logice. Acestea sunt construite astfel încât să nu aibă semnificație, să nu transmită informații practice și, în acest sens, „s-ar putea spune că nu sunt propoziții deloc”. Doar forma lor gramaticală le face să semene cu propoziții, dar nu este suficient că sună a propoziții pentru ca să aibă și sens. A adăuga unui asemenea sistem pur formal o propoziție autoreferențială, precum cele din demonstrația lui Gödel, agravează problema, căci ne îndepărtăm tot mai mult de orice posibilitate de folosire regulată și funcțională a acestor structuri.

Afirmațiile despre adevăr sau nedemonstrabilitate, dacă nu sunt înrădăcinate în practici clare, devin „scamatorii logice”, fără ancoraj real în activitatea matematică sau lingvistică.

17. AFINITĂȚILE WITTGENSTEIN–GÖDEL. O CONVERGENȚĂ PARADOXALĂ

Deși în mod tradițional poziția lui Wittgenstein a fost receptată ca o neînțelegere sau o respingere a teoremei lui Gödel, am constatat existența unei afinități structurale între cele două perspective, deși ele pornesc de la fundamente teoretice diferite. În ciuda diferențelor, ambii descoperă o limită structurală a sistemelor formale. Gödel expune limitele printr-o construcție logică, Wittgenstein le relativizează forța expresivă și capacitatea de a opera cu conceptele de „adevăr” și „demonstrabilitate”. Ambii arată că din interiorul unui sistem formal nu poți spune tot ce ar putea fi adevărat în el, dar, pentru Wittgenstein, tocmai această idee de „adevăr în afara sistemului” e ceea ce nu are sens, dar ar putea fi revizuit într-o metateorie.

Rămâne şi cealaltă posibilitate radicală, tipic wittgensteiniană, și anume, sisteme de tip PM şi chiar teoreme tip Gödel ar putea fi eliminate din teoria şi practica matematicilor. Imposibilitatea funciară a sistemelor logice de a nu oferi posibilitatea de a se decide asupra propriilor propoziţii trebuie dezamorsată, eliminată ca problemă serioasă a logicii şi matematicii.

18. CE PUTEM FACE CU NUMERELE (NATURALE)?

Privită din această perspectivă, întreaga dezbatere indirectă dintre Wittgenstein și Gödel poate fi redusă la o întrebare de logică: „ce putem face cu numerele naturale?” În construcția gödeliană, unicitatea numerelor prime face posibilă codarea formulelor și a demonstrațiilor, ceea ce duce la identificarea unor propoziții indecidabile. Dar dacă imaginăm o „numerizare” diferită, bazată pe un alt sistem numeric, cu teorii mai puternice, care păstrează invarianța la codare, de pildă rațional sau real, se poate ca propoziția lui Gödel să devină demonstrabilă în acel cadru. Acest fapt deplasează întreaga discuție într-un alt joc matematic, țintind nu atât o chestiune de adevăr absolut, cât de reguli și de cadre de utilizare.

Dincolo de poziționările divergente, chestiunea decisivă ține de condițiile structurale ale unei teorii matematice și mai puțin de ingeniozitatea codării lui Gödel. Odată ce o teorie axiomatizabilă reușește să descrie aritmetica numerelor naturale, putem defini în interiorul ei un predicat care exprimă „este demonstrabil". Cu ajutorul procedeului de diagonalizare, această teorie generează inevitabil o propoziție specială, care spune despre ea însăși „Eu nu sunt demonstrabilă în acest sistem". Această propoziție are o proprietate importantă, și anume, rămâne invariantă la metoda de codare folosită, atât timp cât codarea este una corectă și efectivă[19]. Dacă sistemul este consistent, propoziția nu va putea fi demonstrată în acel sistem de bază. Singura modalitate prin care ea ar putea deveni demonstrabilă este trecerea la o teorie mai puternică, capabilă să dovedească consistența celei inițiale. Schimbarea codării nu afectează (ne)demonstrabilitatea, propoziția gödeliană este robustă la orice codare efectivă. Doar schimbarea cadrului teoretic, de pildă, trecerea la o teorie completă și decidabilă precum câmpurile real închise[20], schimbă situația, dar atunci nu mai vorbim despre aceeași teorie, nici despre același tip de propoziții. Mutarea jocului matematic se face prin întărire axiomatică ori prin schimbarea regulilor. De pildă, dacă se lucrează într-o teorie T′ care poate dovedi Cons(T), atunci T′ va demonstra propoziția gödeliană GT, unde „Cons(T)" reprezintă afirmația că sistemul T nu duce la contradicții, deci e consistent, iar „GT" desemnează propoziția gödeliană asociată lui T.

Observația wittgensteiniană rămâne actuală în sensul că problema nu constă în ceea ce „spune" o formulă în sine, ci în ce joc de limbaj, adică într-o anumită teorie, cu regulile ei de inferență și noțiunea ei de demonstrație, unde capătă funcție normativă. Iar unele construcții, deși formalizabile, pot rămâne lipsite de utilizare în jocul de bază, așa cum se întâmplă cu propoziția gödeliană.

BIBLIOGRAFIE

Floyd, Juliet; Putnam, Hilary, „A Note on Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' about the Gödel Theorem", *Journal of Philosophy* 97, vol. 97, nr. 11, 2000, pp. 624–632.

Gödel, Kurt, „On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related Systems I" (1931), în *Collected Works*, vol. I, publications 1929–1936, ed. Solomon Feferman, pp. 144–195, New York, Oxford University Press, 1986.

Hintikka, Jaakko „The Original Sinn of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", în *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, ed. K.Puhl, 1993, pp. 24–51.

Priest, Graham, „Wittgenstein's Remarks on Gödel's Theorem", *Wittgenstein's lasting significance*, ed. Max Kölbel, Bernhard Weiss, London and New York, Routledge, 2004, pp. 207–227.

Wittgenstein, Ludwig, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, ed. G.H. von Wright, R. Rhees, trad. G.E.M. Anscombe, Cambridge, MA, MIT Press, 1983.

Wittgenstein, Ludwig, *Philosophical Investigations*, trad. G.E.M. Anscombe, P.M.S. Hacker, Joachim Schulte, ed. IV, Oxford, Wiley-Blackwell, 2009.

[19] Propoziția Gödel rămâne nedemonstrabilă indiferent ce metodă de numerizare efectivă se alege, nu numai cu numere prime.

[20] Situația se schimbă pentru că teoria însăși e alta: teoria câmpurilor real închise este completă și decidabilă, tocmai pentru că nu codifică suficient aritmetica numerelor naturale.