DOI: 10.59277/PL.2025.28.03

LOGICĂ ȘI GEOMETRIE ÎN FORMAREA CONCEPTELOR ȘTIINȚIFICE. DE LA LOTZE LA CASSIRER

IOAN BIRIȘ

Universitatea de Vest din Timișoara

LOGIC AND GEOMETRY IN THE FORMATION OF SCIENTIFIC CONCEPTS. FROM LOTZE TO CASSIRER

Abstract. In the present study, the author traces the lineage of ideas between Lotze and Cassirer in the process of affirming the logic of relations following two revolutions in 19th-century geometry: a) the affirmation of projective geometry; b) the discovery of non-Euclidean geometries. These revolutions justify the essential presence of ideal elements in the formation of concepts and reasoning, which encourages Cassirer in supporting logical idealism. Taking into account the limits of syllogistic inferences, Lotze attempts to demonstrate the importance of mathematical and systematic inferences for the new logic. There is a continuity of argumentation from Lotze to Cassirer for the new logic and against the method of abstraction from traditional logic, the present study tracing this continuity especially in the sphere of geometric concepts.

Keywords: Aristotelian logic; modern logic; geometric concepts; function; relation.

De la Kant încoace, discuțiile despre raporturile dintre logică și matematică rămân încă de interes, ele intensificându-se adesea prin accente aplicate la relația logică – aritmetică, logică – geometrie, logică – teoria seturilor etc. În cele ce urmează, vom insista asupra raportului logică – geometrie, așa cum este tratat el, după Kant, îndeosebi în a doua jumătate a secolului al XIX-lea și primele decenii din secolul XX.

Cum se știe, în secolul al XIX-lea se produc două revoluții[1] în știința geometriei: a) descoperirea geometriilor non-euclidiene; b) apariția geometriei proiective. În legătură cu problematica geometriilor non-euclidiene au fost angajate numeroase dispute filosofice, aproape toate pornind de la raportarea la Kant, unii susținând că geometria euclidiană (pe care se baza Kant în judecățile sale) rămâne doar una dintre geometriile posibile; alții atrăgând atenția că e nevoie urgentă de un efort de rafinare a definițiilor și conceptelor matematice. Pentru Kant, la vremea sa, era cât se poate de plauzibil să susții că unele concepte geometrice sunt generate pur și simplu de niște operații geometrice, așa cum construirea unui cerc pe tablă sau pe o hârtie înseamnă – prin realizarea efectivă a acelei operații – generarea concomitentă a

[1] Vezi și Jeremy Heis, *The Fact of Modern Mathematics: Geometry, Logic, and Concept Formation in Kant and Cassirer*, Michigan State University (1999)/University of Pittsburgh (2007), p. 52.

conceptului de cerc. Dar ce operații ar putea fi utilizate pentru a obține concepte într-o geometrie non-euclidiană?

În ceea ce privește revoluția proiectivă, al cărei prim-promotor este considerat Jean-Victor Poncelet (care a publicat în 1822 *Traité des propriétés projectives des figures*), accentul cade pe ideea că un plan proiectiv (ca extensie a planului geometric) presupune, în extensia sa, că două drepte diferite se vor întâlni obligatoriu într-un punct, anulându-se astfel postulatul paralelelor din geometria euclidiană[2]. În același timp, centrul atenției se deplasează de la concentrarea pe figurile geometrice la concentrarea pe transformările de tip geometric și pe legile de compoziție. Noutatea semnificativă a acestei noi geometrii constă în faptul că – prin extensie proiectivă – are loc un proces de transmitere neschimbată a unor configurații. Altfel spus, geometria proiectivă studiază acele proprietăți ale figurilor care rămân invariante.

Numită uneori drept geometria „cea mai înaltă" sau geometria „modernă"[3], geometria proiectivă a stârnit și interesul filosofilor și logicienilor, nu doar al specialiștilor în matematică. Să amintim doar că Frege și Russell, doi dintre marii pionieri ai logicii moderne, și-au început cariera[4] cu disertații în geometria proiectivă. Atât ei, cât și alți logicieni au observat că, spre deosebire de crezul lui Kant în formarea conceptelor geometrice prin operații empirice, noua geometrie permite ca o serie de figuri să poată fi generate prin variație continuă, proprietățile rămânând neschimbate.

Între consecințele impuse de cele două revoluții în geometrie, aceea a îndepărtării de empiric implică poate cel mai angajant planul filosofic și logic. În geometriile non-euclidiene, procedeul empiric-intuiționist al lui Kant nu mai funcționează. Frege este conștient de această situație și își pune, încă din tinerețe, problema reprezentării geometrice în plan a formelor imaginare. Atât geometriile non-euclidiene, cât și geometria proiectivă introduc elemente ideale și imaginare în argumentație, elemente care nu pot fi justificate empiric. Nu întâmplător Frege își propune atunci să găsească soluția formării conceptelor (acel proces de *Begriffsbildung*) în noua situație. Nici empiristul Russell nu poate ocoli problema, fiind nevoit, cel puțin pentru o perioadă, să admită elementele „ideale" în calitate de „ficțiuni". Acestei idei a lui Russell se vor opune mai ales teoreticienii din Școala de la Marburg, în special Cassirer. Pentru acesta din urmă, rezultatele matematicilor pure nu sunt „ficțiuni", ci „fapte".

Așa se face că, în urma revoluțiilor din geometrie, matematicieni și logicieni, dar și filosofi iluștri, își pun cu acuitate problema explicării formării conceptelor științifice, matematice și din celelalte științe. Reflecția asupra naturii conceptelor este una care se impune urgent. Dar de aici nu trebuie trasă concluzia că în perioada de timp de la predominanța hegelianismului și până la lucrările epocale ale unor teoreticieni ca Frege, Russell sau Cassirer nu s-a întâmplat nimic în acest domeniu. Dimpotrivă, mai ales în spațiul filosofiei germane, asistăm la o perioadă de intense

[2] Am tratat mai pe larg aceste aspecte în Ioan Biriș, *Lucian Blaga. Conceptele dogmatice*, Cluj-Napoca, Editura Școala Ardeleană, 2020, cap. 3.

[3] Jeremy Heis, *The Fact of Modern Mathematics: Geometry, Logic, and Concept Formation in Kant and Cassirer*, p. 73.

[4] *Ibidem*.

dezbateri, în cadrul cărora îi întâlnim pe un Hermann Lotze, pe Friedrich Adolf Trendelenburg, pe Otto Friedrich Gruppe ori pe Carl von Prantl, pentru a-i aminti doar pe câțiva dintre ei. Dacă pentru Kant logica era deja o știință încheiată, iar pentru Hegel aceasta conta ca o „știință a ideii pure" (fiind echivalentă cu metafizica), în perioada pe care am amintit-o neo-aristotelicul Trendelenburg introduce în centrul dezbaterilor ceea ce a numit „problema logică"[5].

Cu Trendelenburg se deschide o critică dură împotriva hegelianismului, iar Gruppe era convins că realizează un „punct de turnură" (prin lucrarea sa *Wendepunkt*) susținând că logica aristotelică este pur și simplu falsă. Cel ce a dominat însă de la mare înălțime toate aceste dezbateri a fost Lotze.

1. TEORIA CONCEPTULUI ÎN LOGICA LUI HERMANN LOTZE

S-a subliniat adesea că pentru aproape două secole – de la *Critica rațiunii pure* a lui Kant (1781) până la lucrarea *Două dogme ale empirismului* a lui Quine (1951) – o problemă centrală și extrem de controversată în filosofia matematicii[6] a fost următoarea: a avut Kant dreptate să susțină că adevărurile matematice sunt simultan sintetice și *a priori*? Kant recunoaște că principiul posibilității judecăților sintetice *a priori* exprimă un anumit „mister"[7], un mister ce vine dinspre matematici, deoarece caracterul de necesitate al judecăților matematice nu poate proveni din experiență. E vorba de intuiția pură, intuiția în sens transcendental, unde nu găsim nimic care să aparțină sensibilității. Dacă știința principiilor *a priori* din sensibilitate (legate de intuiția empirică) este numită de către Kant estetică transcendentală, știința despre principiile gândirii pure[8] este numită logică transcendentală.

Dar ce ne poate oferi intuiția pură? Ne oferă ea obiectele cunoașterii? Ne oferă intuiția pură, de exemplu, un obiect numit „triunghi"? Se pare că nu, căci o construcție a obiectului „triunghi" în intuiția pură nu poate oferi decât forma acestuia, ceea ce înseamnă că, pentru Kant, triunghiul e posibil să fie construit numai pentru că există *a priori* „triunghiularitatea" ca proprietate pur spațială[9]. Dar pot fi reprezentate astfel de proprietăți? Kant e convins că pentru reprezentarea proprietăților are nevoie de intuiția empirică, respectiv de estetica transcendentală, ceea ce înseamnă că geometria e posibilă numai în condițiile în care – prin estetica transcendentală – se reușește reprezentarea *a priori* a spațiului și timpului fizic ca un fel de „locus" al obiectelor. Adică, în alte cuvinte, pentru Kant, există numai un spațiu, spațiul fizic

[5] Volker Peckhaus, „Language and Logic in German Post-Hegelianism Philosophy", în *Baltic International Jearbook of Cognition, Logic and Communication*, volume 4, 2008, p. 4.

[6] David Bostock, *Philosophy of Mathematics. An Introduction*, Wiley-Blackwell, Malden/USA, Oxford/UK, 2009, p. 62.

[7] Immanuel Kant, *Critica rațiunii pure*, traducere de Nicolae Bagdasar și Elena Moisuc, București, Editura Științifică, 1969, p. 51.

[8] Am tratat mai pe larg aceste aspecte în Ioan Biriș, „Matematism sau logicism? Kant și Frege", în *Probleme de logică*, vol. XXVI, București, Editura Academiei Române, 2023.

[9] Jeremy Heis, *The Fact of Modern Mathematics: Geometry, Logic, and Concept Formation in Kant and Cassirer*, p. 228.

ca „locus" al obiectelor și simultan ca spațiu posibil matematic. Însă această susținere nu mai rezistă în momentul în care apar geometriile non-euclidine[10].

Noua situație, cea de după afirmarea geometriei proiective și a geometriilor non-euclidiene, se află nu doar în atenția matematicienilor, ci și în atenția deosebită a unor filosofi și logicieni. Sub aspect filosofic, renunțarea la concepția lui Hegel (care dominase câteva decenii după decesul acestuia, în 1831) și revenirea la Kant nu era un proces prea simplu[11]. Dovadă pluralitatea școlilor neo-kantiene. Și nu era

[10] Nu este locul aici pentru a intra în amănuntele amplelor dezbateri care s-au desfășurat imediat după apariția geometriilor non-euclidiene. Amintim doar că tânărul Bertrand Russell își începe introducerea la *An Essay on the Foundations of Geometry* (publicat în 1897) cu următoarea observație: în secolele al XVII-lea și al XVIII-lea, geometria a fost o fortăreață a idealiștilor împotriva empiriștilor, iar Kant a redus dezbaterea la o problemă ipotetică. Anume, dacă geometria posedă o necesitate apodictică, aceasta este o chestiune de spațiu, care trebuie să fie privit *a priori* și să fie pur subiectiv. Și, convers, dacă spațiul este pur subiectiv, atunci geometria trebuie să fie apodictic necesară (Bertrand Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Dover Publications, INC., NewYork, 1956, p. 1). Cu precizarea, făcută de către Russell imediat în paragraful 2, că pentru Kant *a priori* și subiectiv sunt termeni aproape interschimbabili („subiectiv" fiind luat în sens psihologic). Însă, dacă discutăm în plan epistemologic, continuă Russell, atunci va trebui să înțelegem prin *a priori* nu ceva subiectiv, psihologic, ci elementul formal din cunoaștere, iar prin empiric să înțelegem elementul material. La Kant *a priori*-ul a fost înțeles în general ca element apodictic în cunoaștere (p. 4), subliniază Russell, dar logica modernă a arătat că propozițiile necesare sunt totdeauna ipotetice (cel puțin sub un aspect), iar necesitatea – luată singură – nu este un criteriu suficient pentru aprioritate. Ținând seamă de geometriile non-euclidiene și de noutățile geometriei proiective, Russell acceptă că folosirea imaginarului în geometrie este eficientă, că ficțiunile sunt convenabile (paragraful 43). Însă, așa cum va arăta și în cazul lui Cohen (din Școala de la Marburg), Russell apreciază și în legătură cu comentariile lui Lotze că, deși sunt excelente în anumite privințe, când e vorba de metageometrie, Lotze ar face dovada unei insuficiente cunoașteri matematice a subiectului (p. 98). Menționăm că, în cuvântul înainte la lucrarea din tinerețe a lui Russell dedicată fundamentelor geometriei, pentru ediția la care ne referim, Morris Kline surprinde cât se poate de clar problema logicianului Russell: anume, pornind de la știința spațiului, trebuie să ne întrebăm cum poate fi cunoașterea geometrică logică și, totodată, logic necesară pentru experiența oricărei forme de externalitate? Prin forme de externalitate Russell înțelege spațiul, proprietățile acestuia și relațiile dintre obiecte existând în afara minții noastre. Geometriile non-euclidiene ne arată că mintea nu este restricționată la gândirea spațiului doar în termeni euclidieni, deci geometria euclidiană nu este logic necesară pentru experiența spațiului. Apoi, geometria proiectivă ne-a dovedit că toate geometriile (și euclidiană, și cele non-euclidiene) pot fi derivate ca niște cazuri speciale ale celei proiective. Asta pentru că, așa cum știm astăzi, geometria proiectivă studiază proprietățile descriptive sau calitative ale spațiului, pe când celelalte geometrii se ocupă cu proprietățile metrice sau cantitative. Concluzia e că proprietățile calitative sunt logic prioritare. Așadar, pentru Russell, geometria proiectivă este aceea care se referă la proprietățile comune tuturor spațiilor, fiind în întregime *a priori*. Calitativul trebuie să preceadă cantitativul, căci, de exemplu, spune Kline, nu poți număra niște mere până nu ai o identitate calitativă a ceea ce înseamnă un măr.

[11] Când a scris eseul despre fundamentele geometriei, Russell se afla încă în perioada sa „hegeliană", așa cum subliniază și Constantin Stoenescu: „Proiectul unei sinteze unificate a științelor, deși de inspirație hegeliană, este cuplat de Russell cu o explorare metodologică de tip kantian menită să ducă la identificarea elementelor *a priori* proprii fiecărei științe. Drept urmare, în primul rând în cazul geometriei, Russell va revizui proiectul transcendental kantian prin redefinirea intuițiilor pure ale sensibilității astfel încât să poată fi explicată posibilitatea geometriilor neeuclidiene" (Constantin Stoenescu, „Probleme ale matematicii în «Programul Tiergarten» al lui Bertrand Russell", în *Probleme de logică*, vol. XXVI, București, Editura Academiei Române, 2023, p. 38). Acest proiect al lui Russell de sinteză dialectică a științelor, continuă Constantin Stoenescu, este inspirat de teza hegeliană conform căreia adevărul este sistemul, dar și de teoria lui Bradley cu privire la adevăr. Construcția unui astfel de sistem este văzută de către Russell ca o sarcină teoretică primară pentru epistemologie. În această sinteză se trece de la o știință la alta pentru a alcătui o ierarhie. Russell începe cu geometria (importantă pentru analiza relației dintre spațiu și materie), însă hegelian vorbind, geometria va fi depășită în sinteză de către cinematică (studiul mișcării materiei), cinematica de către dinamică (prin analiza cauzalității), dar în acest

un proces simplu pentru că însăși concepția lui Kant era una complicată și plină de obscurități. Dacă adevărurile matematice sunt simultan apriorice și sintetice, înseamnă că va trebui să ținem seamă în același timp de două criterii[12]: a) o propoziție matematică este gândită ca necesară; b) o propoziție matematică este gândită ca universalitate strictă.

În cazul geometriei, Kant va considera, de exemplu, că noțiunea de „linie dreaptă" exprimă linia cea mai scurtă dintre două puncte, unii interpreți sugerând că, în viziunea lui Kant, conceptul de linie dreaptă este un concept al direcției (căci linia dreaptă se obține prin mișcarea unui punct mereu în aceeași direcție). Alți comentatori vor face observația că noțiunea de „direcție" este mult mai complexă decât cea de „linie dreaptă"[13].

Oricum ar fi, putem observa din cele spuse până aici că, mai ales pentru filosofi, amintitele revoluții din geometrie și, în general, din matematici ridică prin excelență „problema conceptuală" și, de asemenea, „problema logică" (așa cum sublinia și Trendelenburg). Iar de aceste probleme – conceptuală și logică – se vor ocupa, la un moment dat, în mod deosebit cei din Școala de la Marburg (în special Cassirer) și Frege. Adeseori se uită însă că de la Kant la Frege sau la Cassirer întâlnim o pleiadă de filosofi și logicieni care au dezbătut intens diferitele aspecte ale conceptualizării. Iar între aceștia la loc de frunte se află Hermann Lotze.

Despre *Logica* lui Lotze (prima ediție publicată în 1843) s-a spus că a fost una dintre cele mai influente și mai citite texte din a doua jumătate a secolului al XIX-lea, iar William James îl considera pe Lotze drept mintea cea mai strălucită a vremii sale, perioada 1880–1920 fiind numită „epoca Lotze". S-a apreciat, de asemenea, că influența acestui filosof și logician a fost atât de mare încât se regăsește în fiecare figură importantă din sfera logicii[14]. Lotze studiase filosofia și medicina la Leipzig, având o gândire destul de riguroasă.

Așa cum se proceda în epocă, lucrările de logică se concentrau îndeosebi pe teoria conceptului, pe teoria judecății și pe teoria inferenței. La fel procedează și Lotze, astfel că prima Carte a *Logicii* sale are tocmai această structură (considerată drept logica pură); Cartea a doua ar acoperi ceea ce se numea logică aplicată (definiția, argumentarea, propoziții, legi etc.); iar Cartea a treia ar fi dedicată metodologiei cunoașterii (cunoștințele *a priori* și empirice, elementele formale, adevărul etc.).

În rândurile de față, ne vom opri doar asupra Cărții I[15]. Analizând teoria conceptului, Lotze face observația că în varianta tradițională a acestei teorii găsim

---

moment al sintezei trebuie să fim atenți la bifurcația corporalității, menționează Constantin Stoenescu, în „întindere" (Descartes) și „forță" (Leibniz), Russell optând pentru viziunea lui Leibniz, căci monadele-forță conduc la problema intenționalității, iar aceasta din urmă ne îndreaptă iar către psihologie (de unde plecase Russell în interpretarea lui Kant). Acest retur, după cum am văzut, îl face pe Russell să accepte forma *a priori* a geometriei proiective și să accepte, de asemenea, rolul imaginarului și al ficțiunilor ca element formal în cunoaștere.

[12] Vezi și David Bostock, *op. cit.*, p. 45.

[13] *Ibidem*, p. 50.

[14] Jeremy Heis, *The Fact of Modern Mathematics: Geometry, Logic, and Concept Formation in Kant and Cassirer*, p. 272.

[15] Hermann Lotze, *Logic*, in three books of Thought, of Investigation and of Knowledge, english translation, edited by Bernard Bosanquet, second edition, in two volumes, vol. I, Oxford at the Clarendon Press, 1888.

grupate diferite obiecte, atribute sau evenimente ca într-un compozit. Să zicem – ne propune Lotze – că observăm un compozit de forma *a b c d*, aceste componente aflate în mod izolat[16]. Dar ne putem întreba: aceste componente (părți) doar coexistă?; se găsesc într-o coerență reală?; în ce grad existența unora depinde de existența altora? etc. Apoi dacă vom compara acest compozit cu altele de acest fel, să zicem cu *a b c f* sau cu *a b c g* etc., observăm că grupul *a b c* este permanent (are elemente constante), iar celelalte componente sunt variabile și se pot pierde. În suma de elemente constante (permanente) – subliniază Lotze – găsim ceea ce se poate numi coeziunea internă și esențială a întregului. Această metodă prin care reținem elementele comune a fost metoda uzuală pentru logica tradițională și a permis formarea universalului logic. Respectiva metodă, continuă Lotze, a fost numită metoda abstracției.

Numai că, atrage atenția Lotze în paragraful următor, dacă privim procedurile de azi ale gândirii (îndeosebi în domeniile matematicii), vechea metodă a abstractizării nu este confirmată. De exemplu, dacă luăm elementele „aur", „argint", „cupru" și „plumb", acestea pot diferi în privința culorii, a strălucirii, a greutății și densității, dar universalul lor logic, pe care îl numim „metal", nu este stabilit prin comparații și diferențieri (ca în metoda abstractizării).

Cum sunt coordonate atunci notele în conținutul unui concept? Va trebui să acceptăm ca regulă, crede Lotze, că notele unui concept nu sunt coordonate[17] ca și cum toate ar avea valoare egală, dimpotrivă, ele se află unele în raport cu altele în poziții relative variate. Adică, structura unui concept (notată cu *S*) nu este de forma ecuației $S = a + b + c + d$, etc., ci de forma $S = F$ (*a, b, c, etc*.) (*F* fiind simbolul pentru funcție)[18]. Altfel spus, dacă logica tradițională se baza pe metoda abstractizării, noua logică trebuie să folosească metoda funcțiilor.

Acum, dacă avem în vedere modalitățile de inferență, Lotze atrage atenția că nu se mai poate rămâne la inferența silogistică, ci trebuie să privim dincolo de silogism, să fim atenți la noile forme de gândire. Căci în judecățile de forma „S este P" (din logica aristotelică), subliniază Lotze[19], limbajul exprimă predicatul din judecată cu o universalitate ce nu aparține subiectului său real. De pildă, când spunem „acest trandafir este roșu", aceasta nu înseamnă că trandafirul are un roșu general indefinit, ci că „roșeața" sesizată este a acelui trandafir.

Inferența silogistică nu funcționează în primul rând în matematici, unde găsim inferențe prin substituție, inferențe din proporții și ceea ce Lotze numește ecuații constitutive. Inferența prin substituție funcționează când părțile mutual relaționate – subliniază Lotze – sunt cantități pure, iar relațiile dintre ele sunt combinații matematice cu variate reguli de calcul. Firește, ne spune logicianul Lotze, nu ne oprește nimeni ca, în filosofia morală, de exemplu, să decidem că „orice crimă se pedepsește"[20], fără a fi nevoiți să aducem o justificare matematică a afirmației, dar

[16] *Ibidem*, § 22, p. 40.

[17] Cu altă ocazie (vezi: Ioan Biriș, *Conceptele științei*, București, Editura Academiei Române, 2010, cap. IV 2.2), am teoretizat necesitatea analizei coordonărilor de note în conținutul unui concept prin intermediul conceptului de integrare.

[18] Hermann Lotze, *op. cit.*, § 28, p. 48.

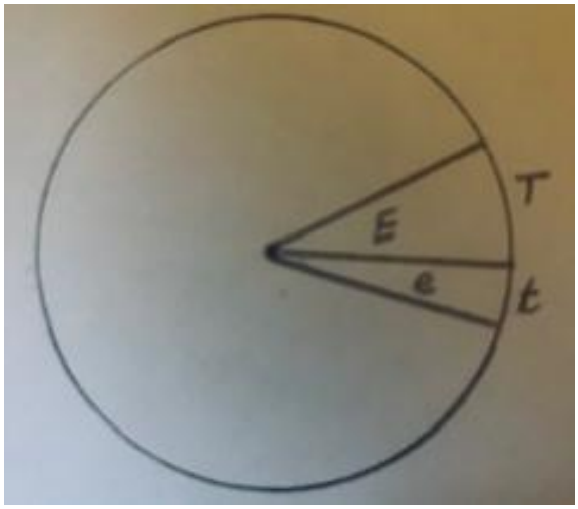
[19] *Ibidem*, § 105, p. 140.

[20] *Ibidem*, § 112, p. 148.

să nu uităm că orice pedeapsă trebuie să fie „măsurată”, să fie „cântărită”, ceea ce trebuie să fie reglat într-un fel în codul penal.

Pe lângă inferențele prin substituție, un loc însemnat îl au inferențele din proporții. Forma simplă a proporției o găsim în egalitatea de raporturi, de exemplu $a/b = c/d$. Din care știm că produsul extremilor este egal cu produsul mezilor: $a \cdot d = b \cdot c$. Iar dacă $a = d$, vom avea proporția $a/b = c/a$, respectiv relația $a^2 = b \cdot c$. De unde rezultă $a = \sqrt{b \cdot c}$, care este media proporțională sau media geometrică.

Dar putem folosi acest procedeu al proporțiilor și în comparația figurilor geometrice? Răspunsul lui Lotze este afirmativ. Să presupunem că avem două unghiuri *E* și *e* cu vârful în centrul unui cerc, precum în figura următoare:



Sunt comensurabile cele două unghiuri? Răspunsul este pozitiv, chiar dacă nu este imediat evident. Observăm că, în mod corespunzător, celor două unghiuri le revin două segmente din cerc, segmentul *T* pentru unghiul *E* și, respectiv, segmentul *t* pentru unghiul *e*. Însă, subliniază Lotze[21], un unghi și un segment de cerc nu pot fi măsurate direct dacă nu au un element comun. Căci diferența dintre două unghiuri ne dă tot un unghi, diferența dintre două curbe ne dă tot o curbă, ceea ce înseamnă că respectivele diferențe sunt incomensurabile.

Totuși, comentează Lotze în continuare, dacă se stabilește că o anumită lungime a curbei *t* aparține unghiului *e* și dacă formăm unghiul *E* prin multiplicarea lui *e* cu o mărime *m*, iar curba corespondentă *T* prin înmulțirea lui *t* cu o mărime *n* (în cazul nostru având egalitatea $m = n$), atunci numerele pure *m* și *n* sunt comensurabile, ceea ce ne va permite să realizăm următoarea inferență din proporție:

$E/e = T/t$ (premisă majoră)

$E = F(e)$ (premisă minoră)

.....

$T = F(e) \cdot t/e$ (concluzie)

[21] *Ibidem*, § 114, pp. 150–151.

O astfel de inferență ne permite, așadar, să reducem relațiile dintre lucruri la termeni de cantități pure.

Dacă îl înțelegem bine pe Lotze, el nu respinge pur și simplu forma tradițională a inferenței bazată pe metoda abstractizării, așa cum o găsim în formula „S este M". El se manifestă mai degrabă împotriva imperfecțiunii acestei inferențe, pe motiv că, așa cum am văzut, universalitatea din predicatul „M" nu aparține subiectului său real (sau nu o acoperă în întregime). Ideal ar fi, crede Lotze, ca în formula „S este M" să putem arăta cum este stabilit conceptul „M" așa încât să acopere toate cazurile din „S" și să admită că proporțiile ce se pot forma între fiecare două note ale sale sunt derivabile din el.

Acest obiectiv a fost atins din momentul în care geometria analitică ne arată că natura unei curbe poate fi explicată prin ecuații. Dar asta înseamnă să descoperim un concept „autoritar" sau „constitutiv"[22], ecuația unei curbe fiind un astfel de concept. O atare ecuație permite derivarea tuturor relațiilor care subzistă în mod necesar între părțile curbei și curbă. Ajungem astfel la ceea ce Lotze numește forma de inferență din ecuații constitutive, metodă care nu se limitează la problemele de geometrie, ci funcționează și în științele naturii. Chimia, de exemplu, apelează la ecuații constitutive pentru explicarea corpurilor compuse.

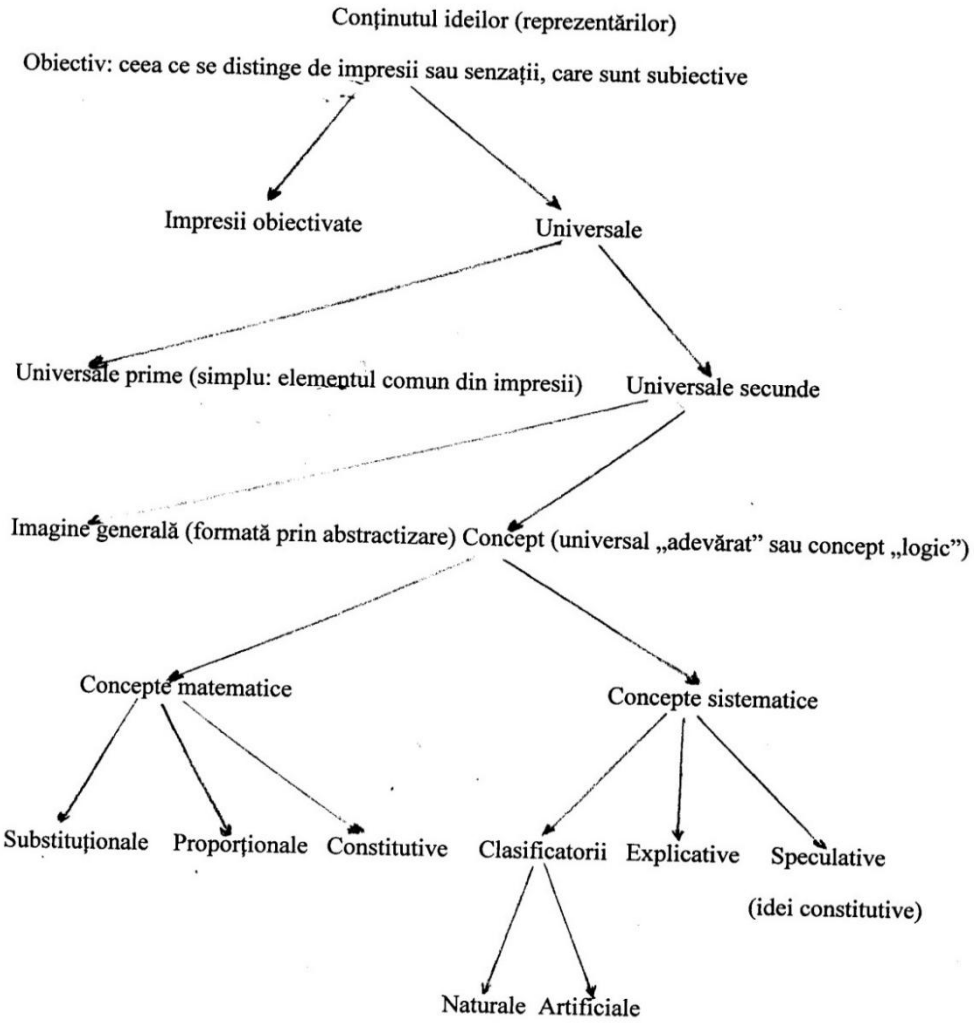
În consecință, nu doar matematica are nevoie de metoda funcțională pentru explicarea conceptelor, ci, în aceeași măsură, și celelalte științe. În concepția lui Lotze, structura conceptelor și tipurile de inferență sunt legate, modelul său funcțional fiind alcătuit pe baza următoarelor cinci elemente[23]: a) un concept $S = F(a, b, c$, etc.) nu este suma notelor sale, ci o funcție a acestora; b) notația funcțională face mai clar aspectul că nu există o structură universală pentru toate conceptele, variabilele dintr-o funcție putând fi relaționate aritmetic sau logaritmic, trigonometric etc., dar întotdeauna definește precis o regulă; c) în modelul funcțional, notele conceptelor sunt interdependente și variază împreună după regula definită; d) unele note ale unui concept sunt „note variabile", funcțional dependente; e) un concept format după modelul funcțional poate realiza o „captură reală" a relațiilor dintre lucruri.

Dacă lăsăm deoparte inferențele silogistice, vom întâlni – în viziunea lui Lotze – încă șase tipuri de inferențe non-silogistice, trei matematice (substituționale, proporționale și constitutive) și încă trei numite „sistematice" (clasificatorii, explicative și speculative). După cum se poate observa din cele arătate până aici, cel mai puternic tip de inferență matematică este acela din ecuații constitutive, așa cum le găsim în geometria analitică. Într-o încercare de a cuprinde cât mai sintetic concepția lui Lotze despre formarea conceptelor și despre inferențele ce pot fi făcute, Jeremy Heis ne propune următorul tablou[24]:

[22] *Ibidem*, § 117, p. 154.

[23] Jeremy Heis, *The Fact of Modern Mathematics: Geometry, Logic, and Concept Formation in Kant and Cassirer*, pp. 283–284.

[24] *Ibidem*, p. 289.



2. ERNST CASSIRER
DESPRE CONCEPTELE GEOMETRICE

În lucrarea lui Jeremy Heis – la care am mai făcut trimitere în rândurile de față –, acesta amintește că în dimineața în care a murit Cassirer (în data de 13 aprilie 1945), filosoful german încheiase un scurt manuscris bazat pe un studiu realizat cu un an înainte despre implicațiile filosofice ale utilizării geometrice a conceptului de grup[25]. În acest manuscris, Cassirer a inclus o amintire personală din vremea studenției în legătură cu studiul filosofiei kantiene. Respectiv, își amintea că nu avea nicio îndoială cu privire la faptul că teza lui Kant a realității empirice și a idealității

[25] *Ibidem*, p. 84.

transcendentale a spațiului reprezintă cheia soluției la problema naturii spațiului. Dar, se întreba acum Cassirer, cum poate fi reconciliată această teză cu progresul cunoașterii geometrice din secolul al XIX-lea?

Preocupat toată viața de fundamentele epistemologiei (inclusiv în filosofia matematicii), Cassirer e convins, într-adevăr, că marea problemă a explicațiilor din acest domeniu, așa cum credea și Kant, este aceea a raportului dintre experiență și idealitate, dintre empiric și rațional. Iar sub acest aspect, progresele din cunoașterea matematică și din științele secolului al XIX-lea, care pun în evidență structurile relaționale și utilizează concepte construite pe baza funcțiilor, nu pot fi acomodate – consideră Cassirer – cu metoda abstractizării din logica tradițională și cu empirismul[26] filosofic inductivist.

Studiind opera lui Kant și încercând să tragă concluzii din istoria filosofiei, Cassirer evidențiază mai ales importanța ideilor lui Leibniz, apreciind că monadologia acestuia – în interpretarea lui Kant –, nu trebuie înțeleasă ca o încercare în vederea explicitării naturii, ci mai degrabă „o idee platonică despre lume”[27]. Căci aceasta reprezintă numai un „obiect al intelectului”, însă constituie, totuși, baza fenomenelor sensibile. Este dată, ca exemplu, legea inerției, lege care, susține Cassirer, nu poate fi formulată în mod clar dacă nu distingem, în prealabil, între spațiul pur (sau absolut, în limbajul lui Newton) și tot ce e conținut în el, precum și

[26] Critica empirismului ar trebui discutată mai nuanțat. Frege respinge la modul ironic poziția lui Mill cu privire la teoria numărului, dar neglijează discuțiile acestuia în legătură cu geometria (vezi și David Bostock, *op. cit.*, p. 74). Frege e de acord cu Kant în susținerea tezei că axiomele geometriei euclidiene sunt sintetice și *a priori*. Însă, pentru John Stuart Mill, caracterul de necesitate al adevărurilor matematice este o simplă iluzie (John Stuart Mill, *A System of Logic*, Longmans, Green and Co., London/NewYork/Toronto,1930, p. 147; prima ediție a fost publicată în anul 1843). După opinia lui Mill, așa-zisa necessitate a adevărurilor geometrice provine din faptul că geometria conține numeroase idealizări. Acest fapt, însă, crede Mill, nu este un argument, căci la fel de bine putem accepta că diferitele figuri geometrice pot fi construite în urma studiului proprietăților geometrice ale obiectelor fizice. Mai târziu, Edmond Goblot, în al său *Traité de logique*, atunci când analizează raționamentul deductiv, se întreabă dacă, într-adevăr, deducția înaintează de la universal la singular sau poate mai degrabă de la „mai general” la „mai puțin general”? (Edmond Goblot, *Traité de logique*, Paris, Armand Colin, cinquiéme édition, 1929, p. 253; prima ediție a apărut în 1917). Căci, continuă Goblot, în matematici (desigur, deductive), *nicio* demonstrație nu are ca obiect stabilirea unei propoziții singulare sau speciale care să fie conținută în una mai generală. Orice raționament matematic, susține Goblot, constă în trecerea fie la o proprietate eterogenă (de exemplu, în triunghiul isoscel, egalitatea unghiurilor rezultă din egalitatea laturilor), fie la o proprietate mai generală (teorema sumei unghiurilor unui poligon rezultă din teorema sumei unghiurilor unui triunghi), dar niciodată la o proprietate mai puțin generală (*ibidem*, p. 255). Rezultă atunci că teoria silogismului nu este deloc o teorie a raționamentului deductiv. Dar poate cea mai convingătoare lucrare în sprijinul empirismului matematic este aceea a lui Jean Nicod, doctorandul lui Russell, care reușește să demonstreze că pot fi construite diferite geometrii ale senzorialului, căci geometria se găsește „în cartea naturii” (Jean Nicod, *La géométrie dans le monde sensible*, nouvelle édition, Paris, PUF, 1962, p. 75; prima ediție a fost publicată în 1923). În construcția sa deosebit de ingenioasă, Nicod arată că putem construi cel puțin trei tipuri de geometrii pornind de la datele senzoriale: a) o geometrie care combină relația de succesiune cu relația de asemănare globală; b) un tip de geometrie a relațiilor de poziție; c) un alt tip care combină relația de simultaneitete cu relațiile de asemănare locală și asemănare calitativă (pentru o prezentare detaliată, se poate consulta Ioan Biriș, *Limbajul și crampele mintale. De la Bolzano la Quine*, București, Editura EIKON, 2021, cap. X).

[27] Ernst Cassirer, *Kant. Viața și opera*, traducere de Adriana Cînța, Pitești, Editura Paralela 45, 2013, p. 109.

dacă nu îl recunoaștem ca un întreg independent, în raport cu care putem discuta apoi despre repaos sau despre mișcarea unui sistem material[28], adică despre realitatea sensibilă.

În preocupările sale, Cassirer ajunge să teoretizeze uneori într-o vecinătate foarte apropiată de analizele[29] celor din linia Frege – Russell, intrând adesea în polemici deschise. El va rămâne însă în cadrele Școlii de la Marburg, promovând o concepție genetică a cunoașterii, cu sublinierea că noțiunile de bază din teoria modernă a conceptului – precum cele de „funcție", „serie" ori „structură relațională" – sunt pur formale, adică n-au nimic din registrul intuitiv (sensibil) de care rămânea cramponat filosoful Kant. În acest sens, se va ocupa neo-kantianul Cassirer și de studiul conceptelor geometrice în lucrarea sa epocală *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, atrăgând atenția, după ce se oprise asupra teoriei numărului și a aritmeticii, că modelul care ar trebui urmat nu se găsește exclusiv în algebră, ci – în formă pură – în geometrie. „Nu conceptul de număr, ci *conceptele spațiului* – din cauza relației imediate cu realitatea concretă – trebuie să servească drept tip"[30].

Pentru Cassirer, noțiunile de „concept" și „formă" sunt sinonime („*Begriff und Gestalt sind Synonyma*") încă de la începuturile istorice ale logicii, îndeosebi în semnificația termenului *eidos*. Astfel, forma geometrică, crede Cassirer, devine expresie și confirmare a tipului logic. Privind lucrurile din perspectivă istorică, neo-kantianul Cassirer, după ce subliniază importanța ideilor lui Descartes, atrage atenția că procesul de cunoaștere geometrică nu studiază obiectele în mod izolat, ci totdeauna ca o totalitate ce poate fi generată constructiv. Iar conversia conceptelor spațiale în concepte numerice este văzută ca un nou nivel intelectual. S-a ajuns, observă Cassirer, în situația ca vechile concepte de formă „substanțială" să fie înlocuite cu „concepte seriale" pure, căci descoperirea științifică a geometriei analitice[31] reprezintă o adevărată „revoluție științifică", extensia geometriei favorizând o logică nouă, care depășește limitele silogismului.

Fiind atent la evoluția istorică a geometriei ca știință, Cassirer atrage atenția că principiul fundamental al geometriei analitice este principiul mișcării, dar mișcarea nu este înțeleasă drept ceva concret (empiric), ci ca proces ideal. Gândită ca o mulțime succesivă de poziții, mișcarea este conectată la o lege, îmbrăcând astfel unitatea unei forme spațiale. Conceptul de mișcare, la fel cu conceptul de număr, va servi atunci ca exemplu al conceptului general de serie. Cu precizarea că „reprezentarea «mișcării» prin puncte este doar simbolul senzorial al acestui act logic al ordonării"[32]. Interpretat în acest fel, conceptul de mișcare nu va mai fi acceptat ca un fel de

[28] *Ibidem*, p. 115.

[29] Am tratat despre interpretarea lui Cassirer a aritmeticii și a naturii funcționale a conceptului în Ioan Biriș, „Filosofia structuralistă a aritmeticii. Ernst Cassirer și Lucian Blaga", în vol. Florin Lobonț, Valeriu Sofronie, Marian Vasile și Dumitru Danciu (coordonatori), *Rost și rostire în opera lui Lucian Blaga*, București, Editura Universitară, 2024.

[30] „Nicht die Zahl-begriffe, sondern die *Raumbegriffe* sind es, die kraft ihrer unmittelbaren Beziehung zur konkreten Wirklichkeit als das eigentliche Vorbild zu gelten haben" (Ernst Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, Berlin, Verlag von Bruno Cassirer, 1910, p. 89).

[31] *Ibidem*, p. 93.

[32] „Die Vorstellung der «Bewegung» der Punkte ist nichts anderes als das sinnliche Symbol für diese logischen Akte der Zuordnung" (Ernst Cassirer, *op. cit.*, p. 95).

reprezentare picturală, fotografică, ci ca un principiu care folosește procesului de raționalizare progresivă a cunoașterii.

Iar în acest proces de raționalizare progresivă, Cassirer vede apoi în geometria infinitezimală drept o formă perfecționată în raport cu geometria analitică, așa cum încercase să demonstreze și întemeietorul Școlii de la Marburg, Hermann Cohen. În același proces, inclusiv conceptul de număr ajunge să se împlinească pe sine prin conceptul general de funcție (*Der Zahlbegriff erfüllt und durchdringt sich mit dem allgemeinen Funktionsbegriff*). După opinia lui Cassirer, acest concept de funcție permite dezvoltarea geometriei în direcția perfecțiunii logice.

Un nou moment decisiv în evoluția geometriei îl constituie afirmarea geometriei diferențiale, care permite să observăm că mulțimea infinită a coordonărilor poate fi privită ca un întreg conceptual. Așa cum în geometria analitică – scrie Cassirer – un punct individual din plan este determinat de valorile coordonatelor x și y, în mod similar în ecuația diferențială $f(x, y, y^1) = 0$ fiecare punct este coordonat într-o anumită direcție de mișcare.

Întreaga geometrie modernă – crede Cassirer – a avansat de la geometria măsurii la geometria poziției. Un mare merit în acest sens, recunoaște neo-kantianul Cassirer, îl are Poncelet, părintele geometriei proiective. Acest geometru ne-a făcut să înțelegem că teoria proprietăților proiective înseamnă introducerea unui nou principiu de cercetare și descoperire, că relațiile unei structuri (unde variațiile depind de o anumită regulă) sunt acelea care constituie adevăratul „obiect geometric". În acest sens, Cassirer scrie[33]:

> Așa cum subliniază Poncelet, nu ne sunt date în mod nemijlocit niciodată proprietățile particularului, ci proprietățile genului, din care își ia startul său tratarea proiectivă a unei figuri; *genus*-ul, totuși, înseamnă aici în mod direct o conexiune a condițiilor prin care este ordonat orice individual, și nu un întreg de atribute separate care revin în individuali. Inferența procedează de la proprietățile conexiunii la cele ale obiectelor conectate, de la principiile seriale la membrii seriilor.

Pe lângă aspectele tehnice pe care le aduce geometria proiectivă ca noutate, Cassirer apreciază mai ales aspectul epistemologic al noului criteriu de construcție al conceptelor geometrice prin admiterea imaginarului[34], respectiv prin admiterea elementelor ideale. Căci, prin proiecție, în noua geometrie corelația cea mai interesantă metodologic, subliniază Cassirer, este corelația ideală, care permite coordonarea figurii deduse cu figura geometrică originală nu prin intermediul unor elemente prezente și observabile, ci în mod direct prin elemente intelectuale, realizându-se o „corelație ideală pură"[35]. Găsim aici, continuă Cassirer, forța ideală

[33] „Es sind, wie Poncelet betont, niemals bloβe Eigenschaften der Art, sondern Eigenschaften der Gattung, von deren Betrachtung die projektive Behandlung eines Gebildes ihren Ausgang nimmt; die «Gattung» aber bezeichnet hier lediglich einen Bedingungs-zu-sammenhang, dem alles Einzelne eingeordnet ist, nicht ein losgelöstes Ganzes von Merkmalen, die in ihm gleichmäβig wiederkehren. Der Schluβ geht von den Eigenschaften der Verknüpften, von den Reihenprinzipien auf die Reihenglieder" (Ernst Cassirer, *op. cit.*, p. 107).

[34] *Ibidem*, p. 108.

[35] *Ibidem*, p. 109.

a conexiunii logice, în sfera geometriei repetându-se același proces pe care l-am identificat în domeniul numerelor.

Se poate constata ușor, după cum observă și Jeremy Heis[36], că neo-kantianul Cassirer înțelege întrebarea – „cum se formează conceptele?" – într-un sens mai larg decât planul strict logic, deoarece el privește această întrebare ca o problemă de metodologie științifică, fiind interesat de ceea ce fac oamenii de știință, ce metode folosesc aceștia pentru a forma concepte, ce anume justifică formarea de noi concepte etc. Așa se explică și acceptarea de către Cassirer a poziției structuraliste a lui Dedekind în interpretarea matematicilor, ca o poziție ce se dezvoltă natural din devenirea istorică a aritmeticii și geometriei. Totodată, pentru Cassirer, structuralismul propus de către Dedekind apare ca un tip de logicism[37] opus celui profesat de către Frege și Russell.

În viziunea lui Cassirer, conceptele de „spațiu" și de „ordine", respectiv de „poziție" din noua geometrie, nu prezintă doar un interes pur matematic, tehnic, ci și unul general filosofic[38], prin aceea că aceste concepte spațiale pot fi incluse în schema conceptelor seriale pure, așa încât „ordinea punctelor în spațiu este concepută în aceeași manieră ca ordinea numerelor"[39] (*Die Ordnung der Raumpunkte ist in derselben Weise begriffen wie die der Zahlen*). Iar adăugarea geometriei la teoria grupului, susține Cassirer, constituie un pas final în definirea grupului ca o totalitate de operații, un grup fiind format din toate transformările geometrice care rezultă din admiterea unei mișcări în spațiul tridimensional obișnuit. Astfel, insistă Cassirer, geometria trebuie diferențiată de topografie prin faptul că sunt numite „geometrice" numai acele proprietăți ale spațiului care rămân neschimbate într-un anumit grup de operații. Dacă așa înțelegem lucrurile, atunci putem susține că diferitele sisteme geometrice sunt egal justificate logic.

Importanța elementelor ideale în cunoașterea geometrică și în celelalte științe se poate constata ușor în geometria formală a lui Hilbert, subliniază Cassirer, geometrie care poate fi socotită ca o „doctrină a formelor pure" sau o teorie pură a relațiilor. În contrast cu definițiile euclidiene, apreciază neo-kantianul Cassirer, care, de exemplu, iau conceptele de „punct" sau de „linie dreaptă" ca date ale intuiției, la Hilbert natura obiectelor geometrice va fi definită exclusiv prin condițiile cărora aceste obiecte le sunt subordonate, căci totul poate fi dedus din sistemul postulatelor. Spus mai metaforic, în această nouă teorie – ne spune și H. Weyl – conștiința reușește să „sară peste umbra sa", dar numai pe calea simbolurilor[40]. Formalismul hilbertian convine și el poziției lui Cassirer, întrucât acest formalism este unul constructiv, adică opus logicismului lui Frege și mai apropiat de Poincaré.

Credincios idealismului logic, Cassirer apără în același timp o „logică a originii" (așa cum o propunea Cohen) și înțelege să ducă o luptă susținută – în

[36] Jeremy Heis, „Ernst Cassirer´s Substanzbegriff und Funktionsbegriff", în *HOPOS: The Journal of International Society for the History of Philosophy of Science*, vol. 4, no. 2, 2014, p. 247.

[37] *Ibidem*, p. 244.

[38] Ernst Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, p. 114.

[39] *Ibidem*, p. 115.

[40] Vezi și Bruno Leclercq, *Intuition et déduction en mathématiques*, EME, Bruxelles, 2014, p. 230.

continuarea efortului lui Lotze, pe care îl consideră un predecesor foarte important – împotriva metodei abstractizării din logica tradițională. Alegând această cale, filosoful Cassirer e convins că aspectul formal al matematicii nu poate fi explicat din perspectiva logicismului din linia Frege – Russell, ci numai din perspectiva teoriei critice a cunoașterii[41], teorie care începe acolo unde „se sfârșește logicismul"!

S-ar putea spune, în concluzie, împreună cu Jeremy Heis[42], că organizarea întregului demers al lui Cassirer în lucrarea *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, în jurul problemei formării conceptelor, i-a permis acestuia să abordeze împreună trei linii istorice distincte de cercetare: a) noua logică a relațiilor (sau funcțiilor); b) dezbaterile metodologiei matematice de către logicienii germani din secolul al XIX-lea; c) reflecția epistemologică neo-kantiană. Rezultatele acestor cercetări îi conferă filosofului german un loc distinct în tabloul filosofic și logic al gândirii contemporane.

[41] Paola Cantu, „The Epistemological Question of the Applicability of Mathematics", în *Journal for the Study of the History of Analytical Philosophy,* Society for the Study of the History of Analytical Philosophy, 2018, 6 (3), pp. 44–45.

[42] Jeremy Heis, „Ernst Cassirer´s Substanzbegriff und Funktionsbegriff", în *HOPOS: The Journal of International Society for the History of Philosophy of Science*, p. 267.